

UNIwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki

Instytut Matematyczny
specjalność: matematyka nauczycielska

Karolina Tomaszewska

**RÓWNOWAŻNOŚĆ PRZEZ ROZKŁAD FIGUR
W GEOMETRII NIEUKLIDESOWEJ**

Praca magisterska
napisana pod kierunkiem
prof. dr hab.
JACKA ŚWIĄTKOWSKIEGO

Wrocław 2005

Spis treści

WSTĘP.....	3
1. OGÓLNE POJĘCIA GEOMETRII NIEEUKLIDESOWEJ.....	4
1.1. Pojęcia pierwotne.....	4
1.2. Aksjomaty.....	4
1.3. Modele geometrii nieeuklidesowej.....	6
1.4. Różne pojęcia i przydatne własności w geometrii nieeuklidesowej.....	13
2. RÓWNOWAŻNOŚĆ PRZEZ ROZKŁAD TRÓJKĄTA Z CZWOROKĄTEM SACCHERI’EGO. PRYZYSTAWANIE DWÓCH CZWOROKĄTÓW SACCHERI’EGO O JEDNAKOWYCH DEFEKTACH I PODSTAWACH.....	16
2.1. Równoważność przez rozkład trójkąta z czworokątem Saccheri’ego.....	16
2.2. Przystawanie dwóch czworokątów Saccheri’ego o jednakowych podstawach i równych defektach.....	20
2.3. Trójkąty o jednakowej parze boków i równych defektach są równoważne przez rozkład.....	23
3. RÓWNOWAŻNOŚĆ PRZEZ ROZKŁAD TRÓJKĄTÓW O JEDNAKOWYCH DEFEKTACH, ALE NIE POSIADAJĄCYCH BOKÓW RÓWNEJ DŁUGOŚCI.....	24
3.1. Przedstawienie problemu.....	24
3.2. Modyfikacja.....	25
3.3. Dowód poprawności konstrukcji.....	25
4. RÓWNOWAŻNOŚĆ PRZEZ ROZKŁAD DOWOLNYCH WIELOKĄTÓW O JEDNAKOWYCH DEFEKTACH.....	30
4.1. Lemat.....	30
4.2. Indukcyjne rozumowanie.....	35

Wstęp

W geometrii euklidesowej znany jest następujący fakt:

Dwa wielokąty są równoważne przez rozkład wtedy i tylko wtedy, gdy mają takie samo pole.

Celem niniejszej pracy jest udowodnienie analogicznego faktu w geometrii nieeuklidesowej. Myślę, że na początku warto przypomnieć pojęcie równoważności przez rozkład. Pojęcie to wprowadza w książce „Geometria” wydanej w 1997 roku przez wydawnictwo Prószyński i S-ka jej autor Jan Zydzler.

Dwa wielokąty nazywamy równoważnymi przez rozkład wtedy i tylko wtedy, gdy można je podzielić na jednakową liczbę wielokątów odpowiednio do siebie przystających.

Warto zauważyć, że pojęcie równoważności jest szersze od pojęcia przystawiania. Dwa wielokąty równoważne przez rozkład nie muszą być przystające, ale jeśli wielokąty są przystające, to są również równoważne przez rozkład.

Dowód przeprowadzać będę metodami elementarnymi. Jednocześnie wszystkie potrzebne do przeprowadzenia tego dowodu pojęcia i fakty zostaną wprowadzone w tej pracy. W swej zasadniczej części praca ta powinna być zrozumiała dla zainteresowanych matematyką uczniów szkół ponadgimnazjalnych.

W całej pracy używam następujących oznaczeń:

- $|AB|$ jako euklidesowa długość odcinka AB ,
- $m(AB)$ jako nieeuklidesowa długość odcinka AB ,
- $\mu(ABC)$ jako nieeuklidesowa miara kąta ABC .

W rozdziale pierwszym wprowadzone są podstawowe, potrzebne do zrozumienia pracy, pojęcia i fakty dotyczące geometrii nieeuklidesowej. Czytelników zainteresowanych tą gałęzią matematyki odsyłam do książek jej poświęconych, np.

1. R. Doman „Wykłady z geometrii elementarnej”, rozdziały 8 i 9;
2. „Szkola geometrii. Odczyty Kaliskie”, rozdziały 10 i 11;
3. R. Courant, H. Robbins „Co to jest matematyka?”, rozdział IV.9.

Rozdział drugi dowodzi równoważności przez rozkład trójkąta z czworokątem Saccheri’ego oraz przystawiania dwóch czworokątów Saccheri’ego o jednakowych defektach i podstawach.

W rozdziale trzecim dowodzę równoważności przez rozkład trójkątów o jednakowych defektach, nie posiadających boków równej długości.

Rozdział czwarty omawia równoważność przez rozkład dowolnych figur wielokątnych o jednakowym polu. W rozdziale tym podany i udowodniony został pomocniczy lemat, który mówi o tym, że w trójkącie o dowolnym defekcie możemy umieścić trójkąt o defekcie mniejszym. Lemat ten wykorzystany jest w dowodzie indukcyjnym faktu równoważności przez rozkład dowolnych figur wielokątnych o takim samym defekcie, który przeprowadzony jest również w tym rozdziale.

Rozdział 1.

Ogólne pojęcia geometrii nieeuklidesowej.

W rozdziale pierwszym przypomnę pojęcia pierwotne, aksjomaty oraz ogólne pojęcia dotyczące geometrii nieeuklidesowej. Przedstawię również dwa podstawowe modele (półpłaszczyznowy model Poincarego oraz model Kleina) tej geometrii.

1.1. Pojęcia pierwotne

Pojęcia pierwotne geometrii nieeuklidesowej pokrywają się z tymi pojęciami w aksjomatycznej teorii geometrii euklidesowej. Są to:

- punkt
- prosta
- relacja należenia (dla par punkt - prosta)
- relacja porządku dla punktów z dowolnej prostej
- miara odcinków
- miara kątów

1.2. Aksjomaty

Formułując aksjomaty będę posługiwać się pojęciami pierwotnymi oraz innymi pojęciami, które zdefiniowane są za ich pomocą, takimi jak odcinek, półprosta, półpłaszczyzna i kąt. Definicji tych pojęć nie będę tutaj przedstawiać.

W geometrii nieeuklidesowej jedynie aksjomat równoległości zastąpiony jest przez

AKSJOMAT ŁOBACZEWSKIEGO:

Przez punkt nie leżący na danej prostej przechodzą przynajmniej dwie różne proste nie przecinające danej.

Pozostałe aksjomaty są takie same jak w geometrii euklidesowej:

AKSJOMATY INCYDENCJI (NALEŻENIA):

- I. Dla dowolnych różnych punktów A i B istnieje dokładnie jedna prosta P przechodząca przez nie.
- II. Na każdej prostej leżą przynajmniej dwa punkty.
- III. Istnieją trzy punkty nie leżące na jednej prostej.

AKSJOMATY PORZĄDKU

- I. Dla punktów z dowolnej prostej P relacja $<_p$ jest relacją liniowego porządku, tzn.:
 - i) jeśli $A <_p B$ to $A \neq B$
 - ii) jeśli $A \in p$, $B \in p$ oraz $A \neq B$ to zachodzi dokładnie jedna z relacji: $A <_p B$ lub $B <_p A$.
 - iii) jeśli $A <_p B$ i $B <_p C$ to $A <_p C$
- II. (aksjomat Moritza Pascha) Dla dowolnych niewspółliniowych punktów A, B, C oraz dowolnej prostej P nie przechodzącej przez żaden z tych punktów, jeśli P przecina odcinek AB , to przecina też dokładnie jeden z odcinków BC i AC .

AKSJOMATY MIARY ODCINKÓW

- I. Dla każdego odcinka AB miara $m(AB)$ jest liczbą dodatnią.
- II. Dla każdej półprostej r o początku w A i dla dowolnej liczby dodatniej d istnieje punkt $B \in r$ taki, że $m(AB) = d$.
- III. Jeśli $A <_p B <_p C$ to $m(AB) + m(BC) = m(AC)$.

AKSJOMATY MIARY KĄTÓW

- I. Dla każdego kąta rs (utworzonego z półprostych r i s o wspólnym początku) miara $\mu(rs)$ jest liczbą z otwartego przedziału $(0, \pi)$.
- II. Dla dowolnej prostej P , dowolnej półpłaszczyzny Ω ograniczonej przez P , dowolnej półprostej r zawartej w P i dowolnej liczby $\alpha \in (0, \pi)$ istnieje półprosta s zawarta w Ω tworząca wraz z r kąt rs taki, że $\mu(rs) = \alpha$.

- III. Niech A, B, C i A', B', C' będą dwoma trójkami niewspółliniowych punktów. Jeśli $m(AB) = m(A'B')$, $m(AC) = m(A'C')$ i $\mu(BAC) = \mu(B'A'C')$, to $\mu(ABC) = \mu(A'B'C')$.

1.3. Modele geometrii nieeuklidesowej

Model matematyczny to struktura zbudowana w innej strukturze, o której zakłada się, że jest lepiej znana. W szczególności modele geometrii nieeuklidesowej „zbudowane” są z elementów euklidesowych.

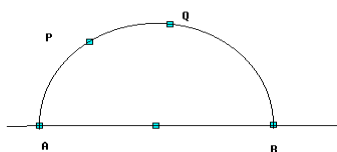
Modele te muszą spełniać aksjomaty teorii, a co za tym idzie także wszystkie twierdzenia dające się z nich wyprowadzić metodą dedukcji.

1.3.1 MODEL POINCAREGO

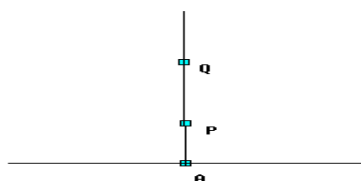
Płaszczyzną jest półpłaszczyzna bez ograniczającej prostej.

1.3.1.1 INTERPRETACJA POJĘĆ PIERWOTNYCH

- Punkty, to zwyczajne punkty.
- Proste, to półproste prostopadłe do brzegu lub półokręgi zawarte w półpłaszczyźnie o środkach na brzegu modelu.
- Relacja należenia interpretowana jest w naturalny sposób.
- Relacja porządku również interpretowana jest w naturalny sposób.
- Miary odcinków określamy następująco:



$$m(PQ) = \left| \ln \frac{|PA|/|PB|}{|QA|/|QB|} \right|$$



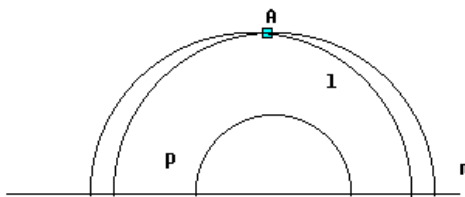
$$m(PQ) = \left| \ln \frac{|PA|}{|QA|} \right|$$

gdzie $|XY|$ oznacza zwykłą euklidesową odległość punktów X, Y .

- Miary kątów, to euklidesowe miary kątów między stycznymi prostych półokręgowych poprowadzonymi w punkcie przecięcia prostych lub między półprostą a styczną do półokręgu poprowadzoną w punkcie styczności.

1.3.1.2 AKSJOMATY W MODELU

Wszystkie aksjomaty w tym modelu są spełnione. Nie będziemy tutaj tego dowodzić. Prawdziwość aksjomatu Łobaczewskiego można zobaczyć na przykład na takim rysunku:

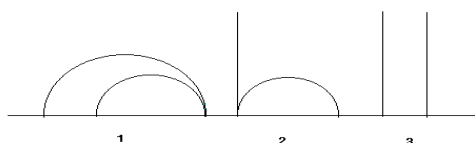


Przez punkt A nie leżący na prostej P przechodzą proste l oraz m , które nie przecinają P .

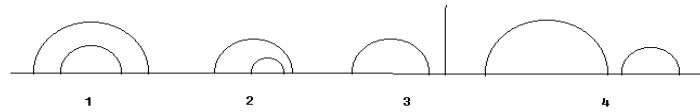
1.3.1.3 ZJAWISKA GEOMETRYCZNE

a) W geometrii nieeuklidesowej wyróżniamy dwa rodzaje par prostych nie przecinających się:

- Proste asymptotyczne, które mają jeden punkt wspólny na brzegu modelu. Proste takie przedstawione są na rysunkach 1 i 2 poniżej. Trzecia para prostych, przedstawiona na rysunku 3 poniżej, ma punkt wspólny „w nieskończoności u góry”. Przez izometrie omawiane poniżej można tą trzecią parę przekształcić na parę typu 1 lub 2 z rysunku.

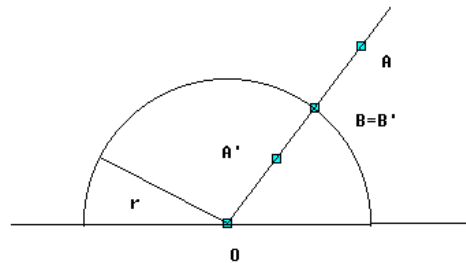


- Proste rozbieżne, czyli takie, które nie mają ze sobą punktów wspólnych i nie są asymptotyczne. Ten typ par prostych przedstawiają rysunki 1, 2, 3, 4 poniżej.



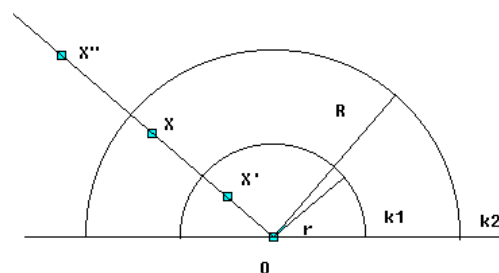
b) Wyróżniamy następujące nieeuklidesowe izometrie:

- odbicia względem prostych:
 - dla półprostej pionowej zwyczajna symetria osiowa względem tej półprostej;
 - dla półokręgu odbiciem jest inwersja względem okręgu zawierającego ten półokrąg;



$$|OA'| \cdot |OA| = r^2$$

- inne izometrie powstają przez złożenie kilku odbić:
 - euklidesowe translacje poziome (złożenie dwóch odbić względem pionowych półprostych);
 - euklidesowe jednokładności o dowolnej dodatniej skali i środku O na brzegu modelu (złożenie dwóch odbić względem prostych, które w modelu są koncentrycznymi półokręgami o środku w punkcie O);



Z definicji inwersji mamy $|OX||OX'| = r^2$ oraz $|OX'||OX''| = R^2$, więc

$|OX''| = \frac{R^2}{|OX'|}$ i $|OX'| = \frac{r^2}{|OX|}$ czyli $|OX''| = \frac{R^2}{r^2} |OX|$. Zatem złożenie tych dwóch

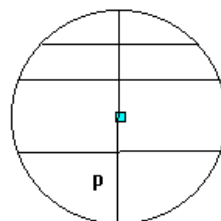
inwersji jest jednokładnością o środku O i skali $\frac{R^2}{r^2}$.

1.3.2 MODEL KLEINA

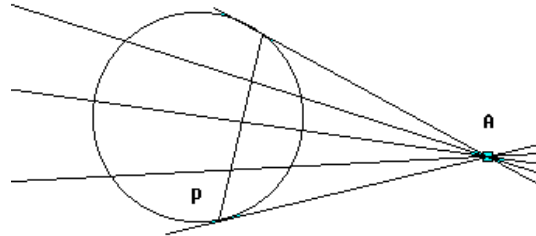
Płaszczyzną jest wnętrze koła.

1.3.2.1 INTERPRETACJA POJĘĆ PIERWOTNYCH

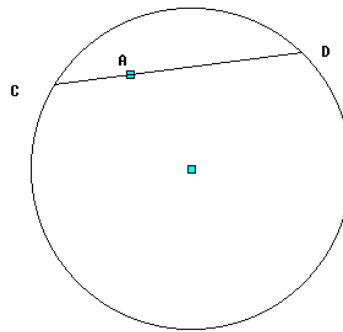
- Punkty, to wewnętrzne punkty koła.
- Proste, to cięciwy okręgu.
- Relacja należenia oznacza naturalne należenie punktu do cięciwy.
- Relacja porządku jest naturalna.
- Miary kątów określa się używając pomocniczej półsfery mającej wspólny brzeg z modelem Kleina (miarę kąta między prostymi l i m w modelu Kleina określa się jako miarę kąta między odpowiadającymi im półokręgami l' i m' na pomocniczej półsferze). Nie będziemy tu o tym więcej pisać. Szczególnym przypadkiem są kąty proste, które dają się zinterpretować w prosty sposób. Prostymi prostopadłymi do danej prostej P są:
 - Cięciwy w naturalny sposób prostopadłe do P , jeśli P jest w modelu średnicą (przechodzi przez środek modelu)



- Cięciwy po przedłużeniu przechodzące przez punkt A , jak na rysunku poniżej (punkt przecięcia stycznych do okręgu w końcach cięciwy P , do której prowadzimy prostopadłą).



- Miarę odcinków określamy w następujący sposób:

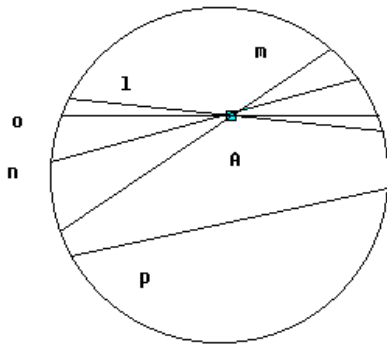


Niech $x_A = \frac{1}{2} \ln \frac{|CA|}{|AD|}$ będzie współrzędną punktu A na prostej P (reprezentowanej w modelu cięciwą CD), gdzie $|XY|$, to euklidesowa długość odcinka XY . Długość odcinka AB oblicza się ze wzoru:

$$m(AB) = |x_A - x_B| = \frac{1}{2} \left| \ln \frac{|CA|/|AD|}{|CB|/|BD|} \right|$$

1.3.2.2 AKSJOMATY W MODELU

W tym modelu aksjomaty są spełnione. W szczególności spełniony jest aksjomat Łobaczewskiego. Na poniższym rysunku przedstawione są przykładowe proste obrazujące prawdziwość tego aksjomatu:

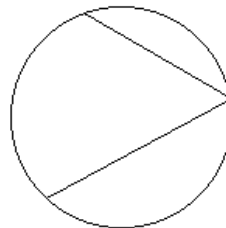


Iloczyn prostych m, n, l, o przechodzących przez punkt A nie leżący na prostej P i tej prostej jest zbiorem pustym.

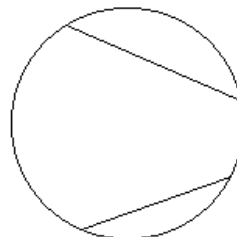
1.3.2.3 ZJAWISKA GEOMETRYCZNE

a) Podobnie jak w modelu Poincarego mamy dwa rodzaje nie przecinających się prostych

- Proste asymptotyczne, które w modelu mają punkt wspólny na brzegu koła.



- Proste rozbieżne, które w modelu są rozłączne jako cięciwy wraz z końcami. Nie mają punktów wspólnych ani wewnątrz, ani na brzegu koła.

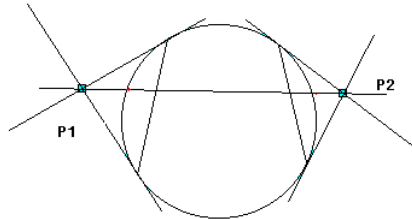


b) TWIERDZENIE:

Proste rozbieżne mają dokładnie jedną wspólną prostopadłą.

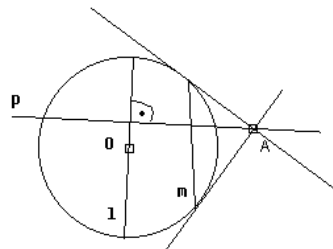
DOWÓD:

1. Gdy żadna z cięciw nie jest średnicą:



Cięciwa będąca wspólną prostopadłą musi po przedłużeniu przechodzić przez P_1 i P_2 , więc jest jedyna.

2. Gdy jedna z cięciw jest średnicą:



Cięciwa będąca wspólną prostopadłą do m i l , musi być w euklidesowym sensie prostopadłą do l oraz przechodzić przez punkt A . Jedyną taką prostą jest prosta p .

c) Dla każdej prostej P i punktu A nie leżącego na niej istnieje dokładnie jedna prosta prostopadła do niej:

- Jeśli prosta P przechodzi przez środek modelu, jest to prosta w naturalny sposób prostopadła do P i przechodząca przez punkt A . Podobnie jak w geometrii euklidesowej taka prosta jest jedyna.
- Jeśli P jest cięciwą, nie przechodzącą przez środek modelu Kleina, to konstruujemy styczne do okręgu w końcach cięciwy i prowadzimy prostą przechodzącą przez A i punkt przecięcia stycznych. Prosta taka jest jednoznacznie wyznaczona przez dwa punkty: punkt A oraz punkt przecięcia się stycznych.

- d) Istnieje rzut prostopadły punktu na prostą. Rzut taki definiujemy podobnie jak w geometrii euklidesowej. Przez punkt A , który chcemy zrzutować prowadzimy prostą prostopadłą do prostej P , na którą rzutujemy. Rzutem prostopadłym A' punktu A na prostą P nazywamy punkt przecięcia się prostej P z tą prostopadłą. Taki punkt jest jedyny, co wynika z faktu, że istnieje dokładnie jedna taka prosta prostopadła.
- e) Rzut prostopadły punktu A na prostą P znajduje się bliżej punktu A niż pozostałe punkty prostej P .

1.4 Różne pojęcia i przydatne własności w geometrii nieeuklidesowej

1.4.1 DEFEKT

- a) trójkąta nieeuklidesowego

Defektem w trójkącie o kątach α , β , γ nazywamy liczbę

$$\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

- b) n – kąta nieeuklidesowego

Defektem n – kąta o kątach $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ nazywamy liczbę

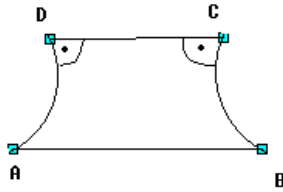
$$(n - 2)\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)$$

Defekt wielokąta mierzy różnicę między sumą kątów w tym wielokącie a sumą kątów w wielokącie euklidesowym o takiej samej liczbie boków.

W geometrii nieeuklidesowej zachodzi następujące twierdzenie:

Defekt każdego wielokąta jest liczbą dodatnią.

1.4.2 CZWOROKĄT SACCHERI'EGO



Czworokątem Saccheri'ego o podstawie AB nazywamy czworokąt na płaszczyźnie nieeuklidesowej, w którym:

1. $m(AB) = m(BC)$
2. Kąty przy wierzchołkach D i C mają po 90°

WŁASNOŚĆ 1: Kąty przy wierzchołkach A i B nie są proste i jak zobaczymy później są tej samej miary. Wtedy z faktu, że defekt czworokąta jest liczbą dodatnią (twierdzenie z punktu 1.4.1) wynika, że kąty przy podstawie są ostre.

WŁASNOŚĆ 2: Symetralna podstawy AB czworokąta Saccheri'ego przecina bok CD pod kątem prostym.

Własność ta wynika z symetrii względem tej symetralnej. Ponieważ jest to symetralna podstawy, punkt B jest obrazem punktu A . Kąty przy podstawie przechodzą na siebie, a z faktu, że odcinki AD i BC są tej samej nieeuklidesowej miary wynika, że przechodzą one na siebie, czyli obrazem punktu D jest punkt C . Symetralna boku AB jest więc również symetralną boku CD , czyli przecina go pod kątem prostym.

1.4.3 POLE WIELOKĄTÓW

W geometrii hiperbolicznej zachodzi następujący fakt:

Pole wielokąta jest równe jego defektowi.

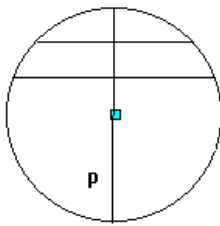
1.4.4 PROSTE ROZBIEŻNE

Proste mające wspólną prostopadłą są rozbieżne. W szczególności boki przyległe do podstawy w czworokącie Saccheri'ego są rozbieżne.

UZASADNIENIE:

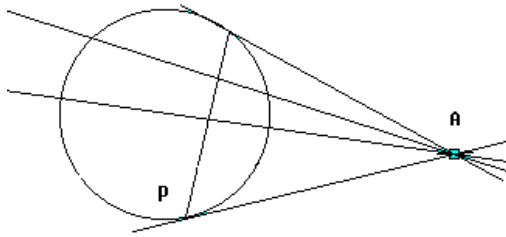
Do uzasadnienia tego faktu użyjemy modelu Kleina.

1. Jeśli wspólna prostopadła jest średnicą



Prosta P musi być w naturalny sposób prostopadła do tych cięciw. Cięciwy te nie mogą mieć punktów wspólnych, gdyż byłyby tą samą prostą.

2. Jeśli wspólną prostopadłą jest inna niż średnica cięciwa



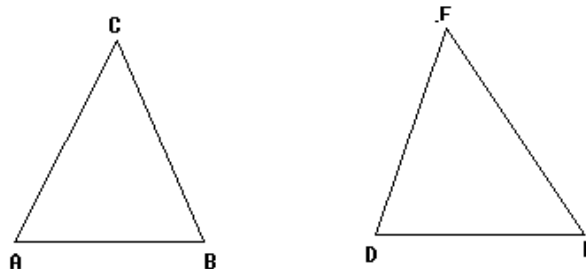
Gdyby proste te miały inny niż A punkt wspólny byłyby tymi samymi prostymi.

1.4.5 KĄTY WIERZCHOŁKOWE

W geometrii nieeuklidesowej kąty wierzchołkowe są równe. Łatwo to uzasadnić na przykład w modelu Pioncarego. Miary kątów, to euklidesowe miary między stycznymi do prostych półokręgowych, a więc własność ta jest analogiczna do własności w geometrii euklidesowej.

1.4.6 PRZYSTAWANIE TRÓJKĄTÓW

Trzeci aksjomat miary kątów jest cechą przystawania trójkątów (bok – kąt – bok). Także cecha kąt – bok – kąt przystawania trójkątów jest prawdziwa w geometrii hiperbolicznej. Dokładniej, w rozdziale 2 wykorzystywać będziemy następującą wersję cechy kąt – bok – kąt przystawania trójkątów:



Jeżeli $m(AC) = m(DF)$ oraz $\mu(BAC) = \mu(EDF)$ i $\mu(CBA) = \mu(FED)$, to trójkąty ABC i DEF są przystające.

Przypomnijmy, że $\mu(ABC)$ oznacza nieeuklidesową miarę kąta ABC .

Rozdział 2.

Równoważność przez rozkład trójkąta z czworokątem Saccheri'ego.

Przystawanie dwóch czworokątów Saccheri'ego o jednakowych defektach i podstawach.

W tym rozdziale udowodnię, że dowolny trójkąt na płaszczyźnie hiperbolicznej jest równoważny przez rozkład z pewnym czworokątem Saccheri'ego oraz fakt, że dwa czworokąty Saccheri'ego o jednakowych defektach i podstawach są przystające.

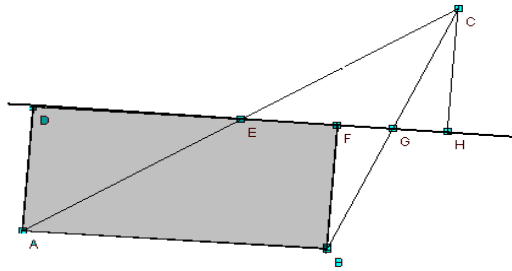
2.1. Równoważność przez rozkład trójkąta z czworokątem Saccheri'ego

Czworokąty Saccheri'ego przystające do trójkątów, które będziemy omawiać konstruujemy w następujący sposób:

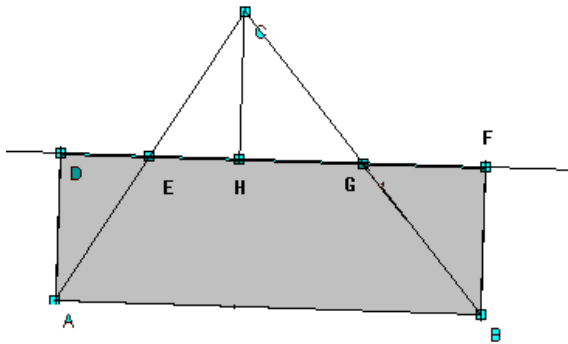
1. Dzielimy ramiona (boki AC i BC) trójkąta na połowy. Otrzymujemy w ten sposób punkty E i G .
2. Przez punkty E i G , wyznaczające środki boków, prowadzimy prostą P .

3. Wierzchołki A , B , C trójkąta rzutujemy prostopadłe na prostą P otrzymując odpowiednio punkty D , F , H .
4. Czworokąt Saccheri'ego powstaje poprzez połączenie wierzchołków A i B trójkąta oraz ich rzutów prostokątnych D , F .

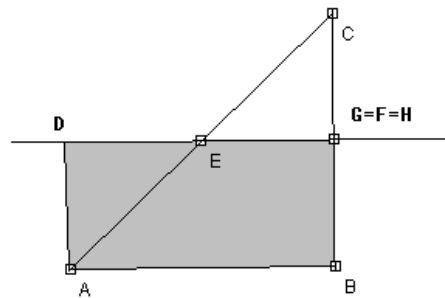
W zależności od położenia rzutów prostokątnych wierzchołków trójkąta względem środków boków tego trójkąta otrzymujemy kilka przypadków. Aby wykazać równoważność przez rozkład trójkąta z czworokątem Saccheri'ego musimy rozpatrzeć przypadki przedstawione na rysunkach 1 – 5:



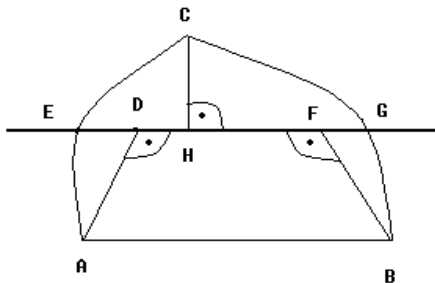
rys.1.



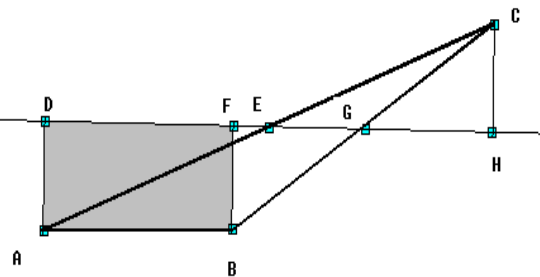
rys.2.



rys.3.



rys.4.



rys.5.

2.1.1 TRÓJKĄT Z RYSUNKU 1.

Udowodnimy, że czworokąt $ABFD$ jest równoważny przez rozkład z wyjściowym trójkątem ABC .

Czworokąt $ABFE$ jest wspólną częścią trójkąta ABC i czworokąta $ABFD$, pozostaje nam pokazać równoważność trójkąta ADE z dwoma trójkątami EGC i BFG . Kąty BGF i HGC jako wierzchołkowe są tej samej miary, kąty BFG i GHC są proste. Dodatkowo odcinki BG i GC są równe. Z tych równości wynika przystawanie trójkątów BGF i GHC (cecha kąt – bok – kąt).

Zatem wystarczy pokazać przystawanie trójkątów AED i EHC . Czynimy to podobnie, jak dla trójkątów BGF i GHC . Kąty ADE i EHC są proste, kąty AED i HEC są równe jako wierzchołkowe. Odcinki AE i EC są równe. Stąd mamy przystawanie trójkątów AED i EHC . Trójkąt ABC jest więc równoważny przez rozkład z czworokątem $ABFD$.

2.1.2 TRÓJKĄT Z RYSUNKU 2.

Podobnie jak w poprzednim punkcie chcemy wykazać równoważność czworokąta $ABFD$ z trójkątem ABC .

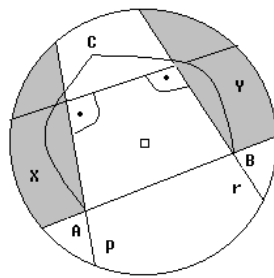
Czworokąt $ABGE$ jest częścią wspólną trójkąta ABC i czworokąta $ABFD$. Do udowodnienia pozostaje nam więc jedynie przystawanie trójkątów AED i BFG z trójkątem EGC . Trójkąt EGC można rozłożyć na dwa trójkąty EHC oraz HGC , których odpowiednie przystawanie z trójkątami AED oraz BGF nie trudno udowodnić, postępując podobnie jak w poprzednim punkcie. Kąty ADE , EHC , CHG oraz GFB są proste. Kąty AED i HEC jako wierzchołkowe są równe, podobnie jak HGC i BGF . Dodatkowa równość boków AE i EC oraz CG i BG wystarcza do wykazania przystawania tych trójkątów (cecha kąt – bok – kąt). Zatem znów mamy równoważność trójkąta z czworokątem Saccheri'ego.

2.1.3 TRÓJKĄT Z RYSUNKU 3.

Równoważność trójkąta ABC z czworokątem $ABDE$ udowodnimy podobnie, jak w poprzednich punktach. Część $ABGE$ jest wspólna dla obu wielokątów, natomiast trójkąty EGC i ADE są przystające (cecha kąt – bok – kąt), ponieważ kąty AED i FEC są równe jako wierzchołkowe, kąty ADE i EGC są proste, a boki AE i EC są równe.

2.1.4 TRÓJKĄT Z RYSUNKU 4.

Sytuacja taka nie może zajść. Można, to uzasadnić używając modelu Kleina.



Proste p i r są rozbieżne, ponieważ zawierają ramiona czworokąta Saccheri'ego (zobacz punkt 1.4.4). Zatem obszary X i Y zaznaczone na powyższym rysunku są rozłączne. Półproste BC i AC wchodzące do wnętrza rozłącznych obszarów X i Y muszą całkowicie zawierać się w tych obszarach. Nie mogą więc mieć punktu wspólnego, czyli przeciąć się w punkcie C , który leży wewnątrz koła (modelu).

2.1.5 TRÓJKĄT Z RYSUNKU 5.

Trójkąt taki możemy przekształcić przez rozkład na któryś z trójkątów z punktów 2.1.1, 2.1.2 lub 2.1.3. Takie przekształcenie można uzyskać przez kolejne wykonywanie operacji, które nazywać będziemy elementarną modyfikacją. Modyfikacja taka wykonywana będzie w następujący sposób:

1. Łączymy punkty B i E .
2. Otrzymany w ten sposób trójkąt BCE obracamy o 180° wokół punktu E . Nieuuklidesowe długości EC i AE są takie same, więc obrazem trójkąta BCE przez ten obrót będzie trójkąt AEB' , który jest częścią trójkąta ABB'

jak na rysunku. Równoważność przez rozkład trójkąta ABB' z wyjściowym trójkątem jest oczywista.



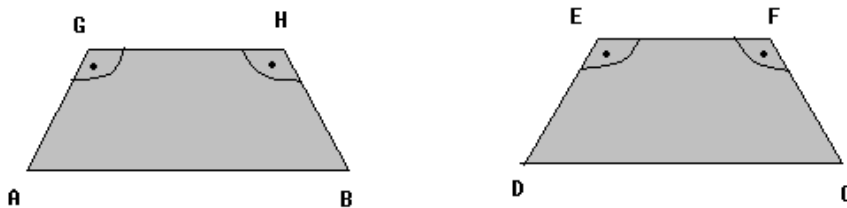
Jeżeli po tej elementarnej modyfikacji nie otrzymamy któregoś z trójkątów z punktów 2.1.1 – 2.1.3 powtarzamy ją aż do otrzymania takiego trójkąta równoważnego przez rozkład z zadaniem trójkątem ABC . Po ciągu elementarnych modyfikacji na pewno tak otrzymamy któryś z żądanych trójkątów. Stanie się tak, ponieważ odcinek EG jest krótszy od odcinka DF , co uzasadnione jest w punkcie 2.1.4. Dlatego po ciągu elementarnych modyfikacji punkt E znajdzie się pomiędzy punktami D i F lub dokładnie w punkcie F . Następnie, kiedy otrzymamy już trójkąt z punktów 2.1.1 – 2.1.3, przekształcamy go na czworokąt Saccheri’ego, jak w poprzednich punktach.

WNIOSEK Z PUNKTU 2.1.:

Każdy trójkąt o zadanej podstawie jest równoważny przez rozkład z pewnym czworokątem Saccheri’ego o takiej samej podstawie.

2.2. Przystawanie czworokątów Saccheri’ego o jednakowych podstawach i równych defektach

Dane mamy dwa czworokąty Saccheri’ego o podstawach AB i DC .



Przyjmijmy następujące założenia i oznaczenia:

- $m(AB) = m(DC) = a$, gdzie $m(XY)$ oznacza nieeuklidesową długość odcinka XY

- Kąty AGH , GHB , DEF oraz EFC są proste.
- $m(AG) = m(BH)$ oraz $m(DE) = m(FC)$
- Defekty obu czworokątów są jednakowe.

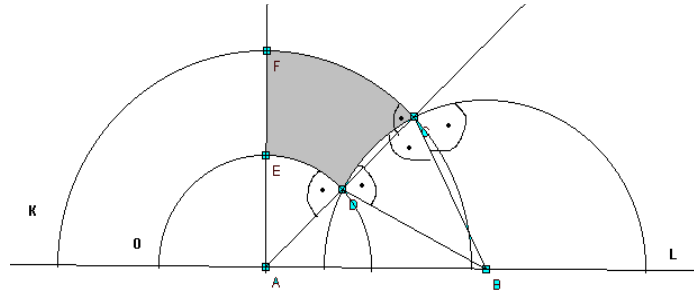
Naszym zadaniem jest udowodnić, że czworokąt $ABGH$ jest przystający do czworokąta $DCEF$. Zrobimy to w trzech krokach:

1. Udowodnimy równość kątów przy podstawie w każdym z czworokątów.
2. Udowodnimy równość nieeuklidesowych kątów GAB i ABH z kątami EDC i DCF .
3. Wykażemy, że czworokąty są przystające.

Ad.1.

W modelu Poincarego czworokąt Saccheri'ego przez izometrię przekształcamy na poniższy czworokąt. Czynimy to za pomocą odpowiedniej inwersji przekształcającej dowolny czworokąt tak, by bok EF leżał na „prostej pionowej”. Proste o i k muszą być prostopadłe do EF , więc po zastosowaniu tej inwersji przekształcą się na takie proste, jak na rysunku, czyli na półokręgi o środku w punkcie A (są to jedyne prostopadłe). Dodatkowo zauważmy, że punkt C jest obrazem D w jednokładności

o środku A i skali $\frac{|AC|}{|AD|}$, więc punkty A , D , C są współliniowe w sensie euklidesowym. Aby to uzasadnić oznaczmy przez D' obraz D przez tę jednokładność. Wtedy obrazem odcinka ED jest odcinek FD' . Nienieuklidesowe miary odcinków ED i FC są z założenia o czworokącie równe, natomiast nienieuklidesowe miary ED i FD' są równe z izometrii. Stąd $m(FC) = m(FD')$, a ponieważ punkty C i D' leżą na tej samej półprostej o początku w F , więc $C = D'$.



Mamy udowodnić równość nieeuklidesowych kątów DCF i CDE czworokąta Saccheri'ego $CDEF$.

Nieeuklidesowe kąty DEF i EFC są proste. Euklidesowy trójkąt BDC jest równoramienny, więc euklidesowe kąty BDC i BCD przy jego podstawie są jednakowej rozwartości. Oznaczmy kąt BCD w tym trójkącie euklidesowym przez α_1 . Wtedy miara kąta między okręgami o i l wynosi $180^\circ - \alpha_1$. Kąty DCF (nieeuklidesowy), dwa kąty między okręgiem l i jego promieniem (zaznaczone na rysunku kąty proste) oraz kąt między okręgami o i l dają w sumie 360° . Łatwo, więc pokazać, że nieeuklidesowy kąt DCF jest równy α_1 . Zauważmy, że kąt między promieniami AD i BD wynosi $180^\circ - CDE$, z drugiej zaś strony jest to kąt $180^\circ - BDC$, czyli $180^\circ - \alpha_1$. Teraz, podobnie jak poprzednio, pokazujemy że kąt CDE równy jest α_1 . To wystarczy, aby pokazać, że nieeuklidesowy kąt DCF równy jest nieeuklidesowemu kątowi CDE .

Ad.2.

Nieeuklidesowe kąty przy podstawie w jednym czworokącie oznaczmy przez α_1 , a w drugim przez α_2 . Ponieważ defekty czworokątów $ABGH$ i $DCEF$ są takie same, możemy zapisać:

$$2\pi - (\pi + \pi + \alpha_1 + \alpha_1) = 2\pi - (\pi + \pi + \alpha_2 + \alpha_2)$$

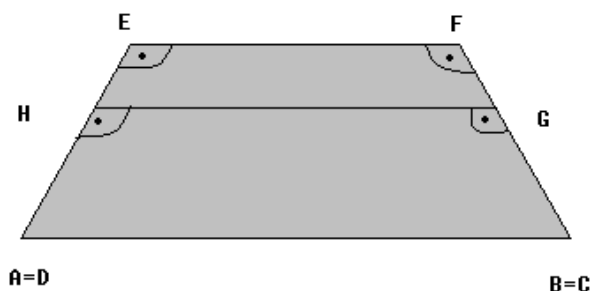
$$2\alpha_1 = 2\alpha_2$$

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

Stąd mamy równość nieeuklidesowych kątów BAG i ABH z kątami DCF i CDE .

Ad.3.

Aby udowodnić, że czworokąty są przystające korzystamy z udowodnionych punktów 1, 2 i nakładamy czworokąty na siebie w następujący sposób:



Proste AE i BF są mają wspólną prostopadłą, są więc rozbieżne. Mogą zatem mieć tylko jedną wspólną prostopadłą. Stąd GH i EF są tymi samymi prostymi. Czworokąty $ABGH$ i $DCEF$ są więc przystające.

2.3. Trójkąty o jednakowej parze boków i równych defektach są równoważne przez rozkład.

WNIOSEK:

Trójkąty o jednakowej parze boków i równych defektach są równoważne przez rozkład.

Wniosek ten łatwo udowodnić na podstawie poprzednich obserwacji z tego rozdziału. Z punktu 2.1 wiemy, że każdy trójkąt jest równoważny z czworokątem Saccheri'ego o takiej samej podstawie jak trójkąt. Następnie z punktu 2.2 wiemy, że dwa czworokąty Saccheri'ego o jednakowych defektach i podstawach są przystające. Defekt trójkąta i równoważnego mu przez rozkład czworokąta Saccheri'ego jest taki sam, gdyż wielokąty te mają równe pola. Zatem trójkąty o jednakowych defektach i parze boków (traktowane przez nas jako podstawy) możemy przekształcić jak

w punkcie 2.1 na równoważne im czworokąty, które jak wiemy są przystające. Stąd również te trójkąty są równoważne przez rozkład.

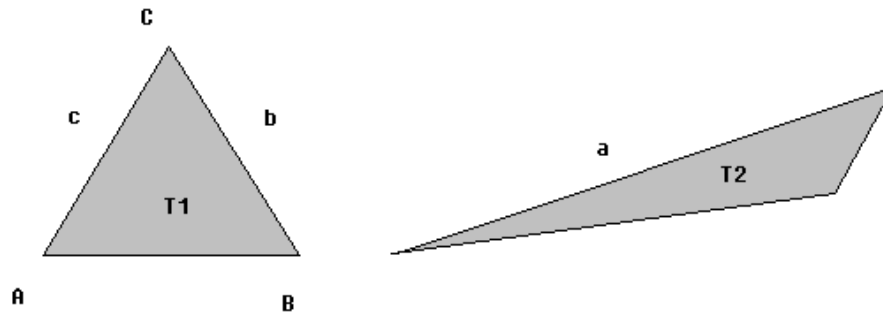
Rozdział 3

Równoważność przez rozkład trójkątów o jednakowych defektach, ale nie posiadających boków równej długości.

W rozdziale trzecim wykażemy, że dowolne dwa trójkąty o jednakowym defekcie są równoważne przez rozkład. W poprzednim rozdziale udowodniliśmy ten fakt dla trójkątów mających parę boków tej samej długości. Tutaj rozważymy przypadek, gdy długości boków w jednym z trójkątów są różne od długości boków w drugim.

3.1. Przedstawienie problemu

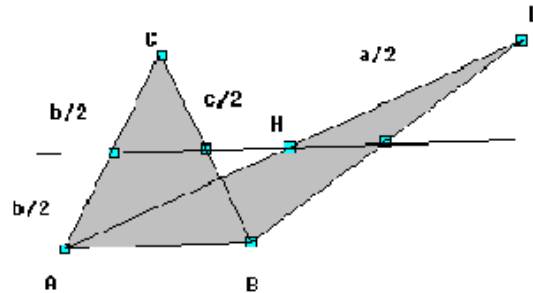
Dane są dwa trójkąty o jednakowych defektach i bokach o różnych długościach.



Załóżmy, że najdłuższy bok w obu trójkątach ma długość a i występuje w trójkącie T_2 . Naszym celem jest takie zmodyfikowanie przez rozkład trójkąta T_1 , aby powstał trójkąt T_1' mający bok długości a . Kiedy to osiągniemy, nasz problem sprowadzi się do zagadnienia, które zostało już rozwiązane w rozdziale drugim (zobacz wniosek 2.3).

3.2. Modyfikacja

Modyfikacji trójkąta dokonamy w następujący sposób. Najpierw podzielimy boki b i c trójkąta T_1 na połowy. Przez punkty wyznaczające połowy boków poprowadzimy prostą P . Z wierzchołka A trójkąta T_1 odkładamy bok o długości równej połowie długości a . W ten sposób powstanie punkt H . Na przedłużeniu odcinka AH odkładamy odcinek HL równy długości $\frac{1}{2}a$. Łączymy koniec otrzymanego odcinka z wierzchołkiem B . Poniższy rysunek przedstawia powstały w ten sposób trójkąt.



Trójkąt ABL jest szukanym przez nas trójkątem. Jest równoważny przez rozkład z trójkątem ABC i ma bok długości a .

3.3. Dowód poprawności powyższej konstrukcji.

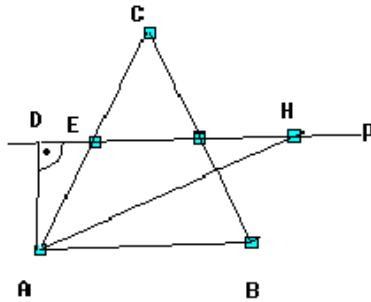
Aby powyższa konstrukcja dawała nam żądany trójkąt, muszą być spełnione dwa warunki:

1. Musi istnieć możliwość odłożenia odcinka długości $\frac{1}{2}a$ i otrzymania punktu Q na prostej p .
2. Trójkąty T_1 i T_1' są równoważne przez rozkład.

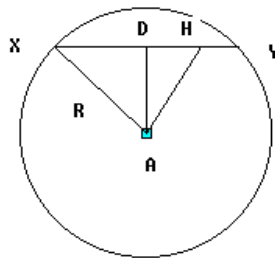
W kolejnych punktach uzasadnimy te fakty.

3.3.1 CZY ODCINEK O DŁUGOŚCI $\frac{1}{2}a$ PRZETNIE PROSTĄ P ?

Aby konstrukcja trójkąta była poprawna, musimy być pewni, że odkładając odcinek równy nieeuklidesowej długości $\frac{1}{2}a$ „trafimy” na prostą P . Sytuację tą przedstawia poniższy rysunek:



Wiemy, że $d = m(AD) \leq m(AE) < \frac{1}{2}a = M$. Pierwsza nierówność uzasadniona jest przez punkt 1.3.2.3 e). Dowód przeprowadzimy korzystając z modelu Kleina. Interesujące nas odcinki z powyższego rysunku zaznaczymy w modelu Kleina.



Na powyższym rysunku zobrazowana jest sytuacja, którą mamy udowodnić. Przyjmijmy oznaczenia, że odcinki o nieeuklidesowej długości d i M , mają euklidesowe długości odpowiednio d' i M' . Promień koła (modelu) ma długość 1. Obliczmy długości d' oraz M' . Ze wzorów przedstawionych w rozdziale

pierwszym, wiemy że $d = \frac{1}{2} \ln \frac{d'}{1-d'}$ oraz $M = \frac{1}{2} \ln \frac{M'}{1-M'}$. Z tych wzorów po

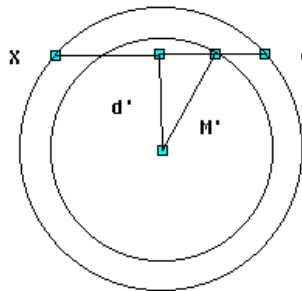
prostych przekształceniach otrzymujemy euklidesowe długości $d' = \frac{e^{2d}}{e^{2d} + 1}$ oraz

$M' = \frac{e^{2M}}{e^{2M} + 1}$. Ponieważ funkcja przedstawiająca długości M' i d' jest rosnąca,

a $M > d$, mamy nierówność $M' > d'$. Dodatkowo licznik wyrażenia przedstawiającego długość M' jest mniejszy od jego mianownika. Ostatecznie, więc między długościami M' , d' oraz długością promienia istnieje następująca zależność:

$$d' < M' < 1.$$

Mamy udowodnić, że odcinek M' przetnie cięciwę. Dzięki powyższej zależności nietrudno udowodnić, że odcinek długości M' dłuższy niż d' i krótszy niż 1 przetnie cięciwę XY .



Odcinek ten na pewno znajdzie się wewnątrz okręgu, który jest modelem, ponieważ $M' < 1$, czyli promienia tego okręgu. Okrąg zatoczony promieniem M' przetnie cięciwę XY , ponieważ $M' > d'$. Udowodniliśmy więc, że odcinek długości $\frac{1}{2}a$ przetnie prostą P .

3.3.2 DOWÓD RÓWNOWAŻNOŚCI TRÓJKĄTÓW ABC I ABL .

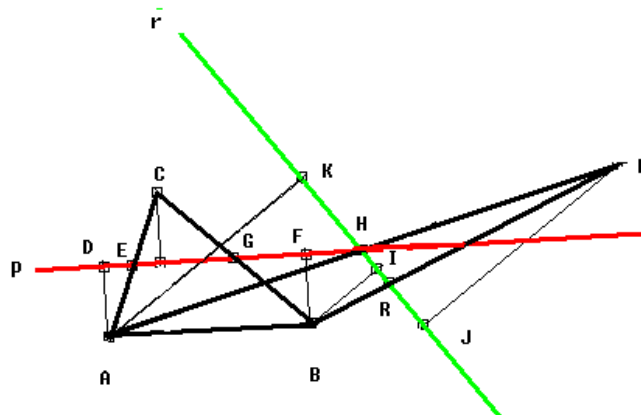
Do przeprowadzenia dowodu równoważności przez rozkład trójkątów ABC i ABL będziemy potrzebować pomocniczego faktu.

POMOCNICZY FAKT:

Niech ABL będzie trójkątem opisanym w punkcie 3.2 i niech R będzie środkiem boku BL . Wówczas R leży na prostej P .

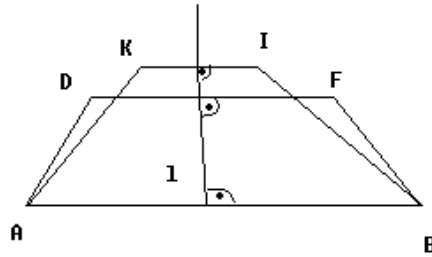
DOWÓD:

Naszym zadaniem jest uzasadnienie, że R również leży na prostej P . Gdyby taki fakt nie zachodził mielibyśmy sytuację przedstawioną na poniższym rysunku.



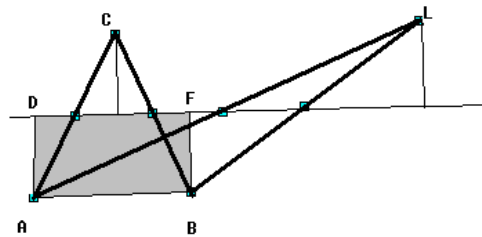
Środki boków AC i BC trójkąta ABC oraz AL i BL trójkąta ABL nie leżą na jednej prostej. Wtedy rzutując prostopadłe wierzchołki odpowiednio trójkąta ABC na prostą P , a trójkąta ABL na prostą r , otrzymujemy dwa czworokąty Saccheri'ego, takie jak w punkcie 2.1 rozdziału drugiego, $ABDF$ oraz $ABKI$. Proste P i r zawierają boki EF oraz KI czworokątów i mają wspólny punkt H , czyli nie są rozłączne. Taka sytuacja nie może zajść. Do uzasadnienia tego faktu użyję własności 2 z punktu 1.4.2 rozdziału pierwszego.

Oba czworokąty Saccheri'ego mają wspólną podstawę, możemy więc umieścić je tak, jak na poniższym rysunku.



Niech l będzie symetralną wspólną boku AB tych czworokątów. Wtedy proste DF i KI są prostopadłe do l , a zatem albo są rozbieżne, albo są tą samą prostą. Ale proste te mają wspólny punkt H , więc nie mogą być rozbieżne. Stąd proste P i r pokrywają się, więc punkt R leży na prostej P . To kończy dowód faktu

Z faktu, że punkt R leży na prostej P wynika, że czworokąty Saccheri'ego powstałe z rzutowania wierzchołków tych czworokątów są równe.



Z rozdziału drugiego wiemy, że trójkąt jest równoważny przez rozkład z czworokątem Saccheri'ego powstałym przez rzutowanie jego wierzchołków. Skoro więc oba te trójkąty dają po tej operacji ten sam czworokąt, są one równoważne.

Konstrukcja z punktu 3.2 oraz te uzasadnienia pozwalają nam stwierdzić, że dwa trójkąty nie posiadające żadnego boku równej długości są równoważne przez rozkład, jeśli mają jednakowe defekty.

Rozdział 4

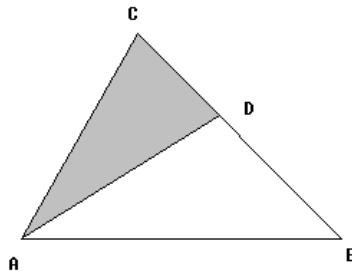
Równoważność przez rozkład dowolnych wielokątów o jednakowych defektach.

W rozdziale czwartym udowodnimy indukcyjnie, że dowolne wielokąty o jednakowych defektach są równoważne przez rozkład. W dowodzie tym użyjemy lematu, że w dowolnym trójkącie możemy „umieścić” trójkąt o zadanym mniejszym defekcie. Lemat ten udowodnimy na początku rozdziału.

4.1. Lemat

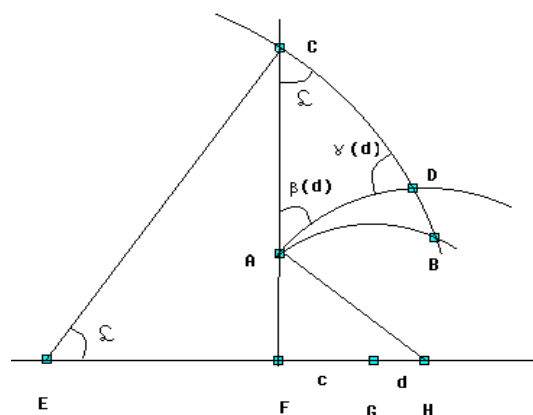
4.1.1 SFORMUŁOWANIE LEMATU

W dowolnym trójkącie ABC o defekcie def_1 możemy „umieścić” trójkąt ACD , jak na rysunku, o dowolnym zadanym defekcie def_2 , takim że $def_2 < def_1$.



4.1.2 DOWÓD LEMATU

Dowód przeprowadzimy w modelu Poincarego. Zajmiemy się dowolnym trójkątem w tym modelu. Trójkąt ABC ma przynajmniej dwa kąty ostre, bo suma kątów w nieeuklidesowym trójkącie jest mniejsza od π . Przyjmijmy, zatem że kąty przy wierzchołkach A i C są ostre. Przez odpowiednią izometrię, taką by prosta AC przekształciła się w prostą „pionową”, przekształcamy na trójkąt z poniższego rysunku.



rys.1.

Wprowadźmy następujące oznaczenia dla euklidesowych odcinków z rysunku:

$$|FC| = y_1,$$

$$|FA| = y_2,$$

$$|FG| = c,$$

EC – promień okręgu CB ,

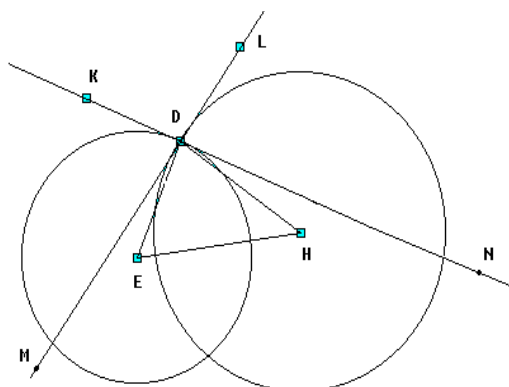
AG – promień okręgu AB .

Z ostrości kątów przy wierzchołkach A i C wynika położenie środka E półokręgu będącego nieeuklidesową prostą CB na lewo od F . Podobnie G , środek półokręgu reprezentującego nieeuklidesową prostą AB , leży na prawo od F . Nieeuklidesowa prosta AD dzieląca trójkąt ABC na dwie części, musi być w modelu półokręgiem o środku w pewnym punkcie H , leżącym na prawo od G . Odcinek AH , to promień szukanego półokręgu AD . Długość odcinka GH będzie parametrem i oznaczmy ją literą d . Punkt F , to początek układu współrzędnych. Dane są długości y_1 i y_2 oraz nieeuklidesowy kąt ACD , który ma miarę α . Wiadomo, że euklidesowy kąt CEF jest również miary α . Odcinek FE ma zatem euklidesową długość $ctg\alpha \cdot y_1$. Do naszego dowodu będziemy potrzebować miar nieeuklidesowych kątów CAD oraz ADC wyliczonych w zależności od położenia punktu H lub równoważnie od parametru d . Kąty te nazwiemy odpowiednio $\beta(d)$ i $\gamma(d)$.

Aby wyliczyć kąt $\beta(d)$, a dokładniej jego tangens, skorzystamy z faktu, że również

euklidesowy kąt AHF ma taką miarę. Tak więc $tg[\beta(d)] = \frac{y_2}{c+d}$.

Aby wyliczyć kąt $\gamma(d)$, a dokładniej jego cosinus, skorzystamy z następującego faktu:



Kąt MDK (kąt między okręgami) ma taką samą miarę jak kąt EDH .

Kąt między okręgami, to kąt między ich stycznymi w punkcie styczności. Odcinek ED jako promień jest prostopadły do stycznej KN , podobnie HD jest prostopadły do ML . Tak więc kąty MDK i EDH mają tę samą miarę.

rys.2.

Kąt $\gamma(d)$ jest kątem między okręgami AD i CB z rysunku 1. Aby go wyliczyć skorzystamy z powyższego faktu. Oznaczenia na rysunku 2 są analogiczne do oznaczeń z rysunku 1. Potrzebne nam długości możemy łatwo wyliczyć. Promień ED okręgu CD ma taką samą długość jak promień EC tego okręgu, natomiast $|HD| = |AH|$. Tak więc:

$$\frac{y_1}{|EC|} = \sin \alpha, \text{ czyli } |EC| = \frac{y_1}{\sin \alpha}$$

$$|AH| = \sqrt{y_2^2 + (c+d)^2}$$

$$|EH| = ctg \alpha \cdot y_1 + c + d.$$

Stosując twierdzenie cosinusów, do trójkąta AHC , mamy:

$$(ctg \alpha \cdot y_1 + c + d)^2 = \frac{y_1^2}{\sin^2 \alpha} + y_2^2 + (c+d)^2 - 2 \frac{y_1}{\sin \alpha} \cdot \sqrt{y_2^2 + (c+d)^2} \cdot \cos \gamma(d).$$

Po przekształceniach otrzymujemy:

$$\cos \gamma (d) = \frac{ctg^2 \alpha \cdot y_1^2 + c^2 + 2dctg \alpha \cdot y_1 + 2ccgtg \alpha \cdot y_1 + 2cd + d^2 - \frac{y_1^2}{\sin^2 \alpha} - y_2^2 - d^2 - c^2 - 2cd}{-2 \frac{y_1}{\sin \alpha} \sqrt{y_2^2 + (c+d)^2}},$$

po uproszczeniu, mamy:
$$\cos \gamma (d) = \frac{ctg^2 \alpha \cdot y_1^2 + 2dctg \alpha \cdot y_1 + 2ccgtg \alpha - \frac{y_1^2}{\sin^2 \alpha} - y_2^2}{-2 \frac{y_1}{\sin \alpha} \sqrt{y_2^2 + c^2 + 2cd + d^2}}$$

Wprowadźmy następujące oznaczenia: $S(d)$ jako zależną od parametru d sumę kątów w nieeuklidesowym trójkącie ADC , $S(0)$ jako sumę kątów w nieeuklidesowym trójkącie ABC . Mamy zatem $S(0) = \alpha + \beta + \gamma$ oraz $S(d) = \alpha + \beta(d) + \gamma(d)$.

Obliczmy granicę $S(d)$ przy d dążącym do nieskończoności:

$$\begin{aligned} \lim_{d \rightarrow \infty} S(d) &= \lim_{d \rightarrow \infty} (\alpha + \beta(d) + \gamma(d)) \\ \lim_{d \rightarrow \infty} S(d) &= \lim_{d \rightarrow \infty} \alpha + \lim_{d \rightarrow \infty} \beta(d) + \lim_{d \rightarrow \infty} \gamma(d) \\ \lim_{d \rightarrow \infty} S(d) &= \alpha + \lim_{d \rightarrow \infty} \beta(d) + \lim_{d \rightarrow \infty} \gamma(d) \end{aligned}$$

Najpierw musimy, więc obliczyć granice $\lim_{d \rightarrow \infty} \beta(d)$ oraz $\lim_{d \rightarrow \infty} \gamma(d)$. Do obliczenia tych granic posłużymy się funkcjami trygonometrycznymi tych kątów, które obliczyliśmy wcześniej:

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \cos \gamma (d) = \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{ctg^2 \alpha \cdot y_1^2 + 2dctg \alpha \cdot y_1 - \frac{y_1^2}{\sin^2 \alpha} - y_2^2}{-2 \frac{y_1}{\sin \alpha} \sqrt{y_2^2 + d^2}}.$$

W wyrażeniu tym mamy stałe i zmienną d . Możemy, używając jako stałych liter A, B, C, D, E uprościć to wyrażenie:

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \cos \gamma (d) = \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{A + B \cdot d}{C \cdot \sqrt{D + Ed + d^2}}$$

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \cos \gamma (d) = \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\frac{A}{d} + B}{C \cdot \sqrt{\frac{D}{d^2} + \frac{E}{d} + 1}}$$

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \cos \gamma (d) = \frac{B}{C}.$$

Teraz możemy podstawić za B i C wyrażenia wcześniej używane i otrzymujemy:

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \cos \gamma (d) = \frac{-2ctg\alpha y_1}{-2 \frac{y_1}{\sin \alpha}} = -\cos \alpha.$$

Ponieważ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$, możemy wyciągnąć wniosek, że:

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \gamma (d) = \pi - \alpha.$$

Teraz policzmy granicę $\lim_{d \rightarrow \infty} \beta (d)$:

$$\lim_{d \rightarrow \infty} tg \beta (d) = \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{y_2}{d} = 0.$$

Tak, więc $\lim_{d \rightarrow \infty} \beta (d) = 0$. Czyli $\lim_{d \rightarrow \infty} S(d) = \alpha + \pi - \alpha = \pi$.

$S(d)$ zależy od d w sposób ciągły, $S(0) = \alpha + \beta + \gamma$, więc z własności Darboux $S(d)$ przyjmuje wartości pośrednie między $\alpha + \beta + \gamma$ a π . Zatem defekt trójkąta ACD w zależności od parametru d , przyjmuje wszystkie wartości pomiędzy $\alpha + \beta + \gamma$ a π . Zatem, dla pewnego parametru d , $def(ACD) = def_1$. W ten sposób udowodniliśmy lemat z punktu 4.1.1.

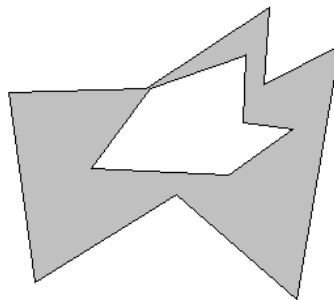
4.2. Indukcyjne rozumowanie

Zapowiadany w tytule rezultat będzie dowiedziony dla nieco szerszej klasy figur niż wielokąty, dla tzw. *figur wielokątnych*.

DEFINICJA:

Figurą wielokątną nazywamy figurę, która jest sumą skończonej liczby nie zachodzących na siebie trójkątów.

Przykład figury wielokątnej przedstawiony jest na poniższym rysunku:

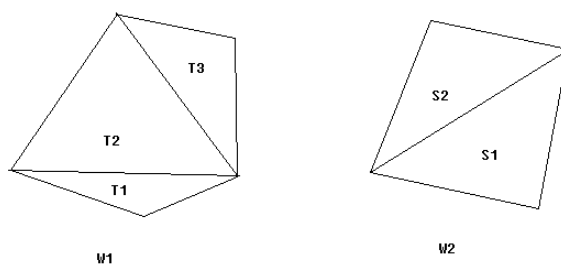


Naszym celem jest indukcyjny dowód następującego faktu:

Dwie figury wielokątne o jednakowych polach są równoważne przez rozkład.

Indukcję będziemy przeprowadzać ze względu na liczbę trójkątów, na jaką w sumie podzielone będą figury wielokątne, których równoważność mamy wykazać. Na początek przeanalizujemy prosty przypadek.

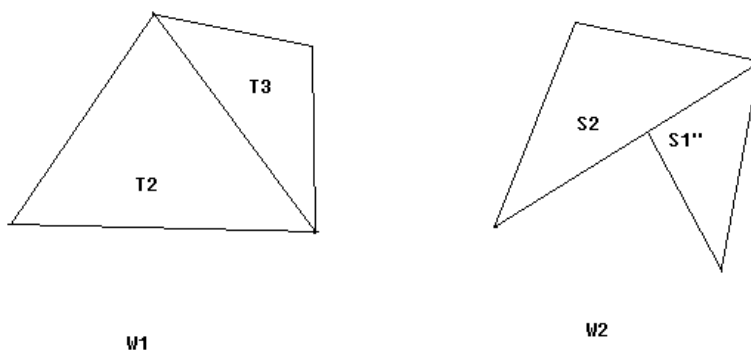
Mamy dane dwie figury wielokątne o jednakowych polach. Niech łączna liczba trójkątów, na które można podzielić te figury wynosi pięć.



Pola obu figur wielokątnych są jednakowe. Ponieważ wielokąty te rozłożone są na trójkąty, możemy zapisać:

$$def(T_1) + def(T_2) + def(T_3) = def(S_1) + def(S_2).$$

W obu figurach szukamy trójkątów o jednakowych defektach. Jeśli takie trójkąty znajdziemy, np. jeśli $def(T_2) = def(S_1)$, to z rozdziału trzeciego wiemy, że trójkąty takie są równoważne przez rozkład. Zatem wystarczy uzasadnić równoważność przez rozkład części figur pozostałych po usunięciu tych trójkątów. Te pozostałe części mają równe pola i dadzą rozłożyć się łącznie na mniejszą liczbę trójkątów (tutaj trzy). Jeśli trójkątów o jednakowym defekcie nie ma, to znajdziemy trójkąt o najmniejszym defekcie. Załóżmy, że jest to trójkąt T_1 i że jego defekt jest mniejszy niż defekt trójkąta S_1 . Wtedy możemy użyć lematu 4.1.1. i w trójkącie S_1 umieścić trójkąt S_1' o defekcie takim, jak defekt trójkąta T_1 . Następnie powtarzamy poprzednie rozumowanie i rozważamy figury wielokątne, powstałe przez usunięcie trójkątów T_1 i S_1' , rozłożone łącznie na mniejszą liczbę trójkątów. Sytuacja nasza upraszcza się do dwóch figur wielokątnych, które rozłożone są łącznie na cztery trójkąty. Usuwając trójkąty o jednakowych defektach z obu figur wielokątnych, otrzymujemy figury złożone łącznie z mniejszej liczby trójkątów. Udowodnienie równoważności przez rozkład dla tych „mniejszych” figur jest równoważne z udowodnieniem jej dla „większych”.



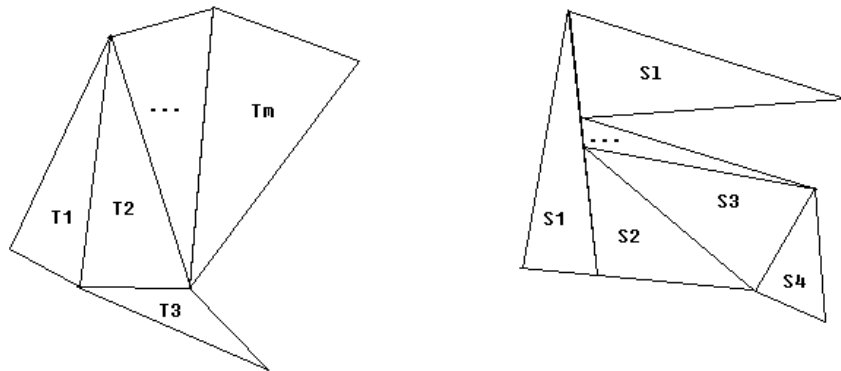
W sytuacji, gdy mamy mniejszą łączną liczbę trójkątów postępujemy analogicznie. Zmniejszamy w ten sposób całkowitą liczbę trójkątów, na które podzielone są figury wielokątne, a pola figur wielokątnych, które otrzymujemy jest taki sam. Postępujemy w ten sposób do momentu, gdy otrzymamy dwa trójkąty o jednakowych defektach. Trójkąty te są równoważne przez rozkład, co wykazane jest w rozdziale trzecim. Usuwając z figur wielokątnych równoważne przez rozkład trójkąty doszliśmy do momentu, gdy mamy dwa równoważne przez rozkład trójkąty. Możemy wnioskować stąd, że wyjściowe figury wielokątne były równoważne przez rozkład.

Rozpatrzmy teraz przypadek ogólny. Udowodnimy indukcyjnie następujące stwierdzenie:

Dla każdego n dowolne dwie figury wielokątne o jednakowych polach dające się rozłożyć łącznie na n trójkątów są równoważne przez rozkład.

Dla $n = 2$ fakt ten wynika z rozdziału trzeciego, gdyż obie figury są wtedy trójkątami.

Załóżmy, że jest to prawda dla $n < k$. Uzasadnimy, że wówczas jest to też prawda dla $n = k$.



$$m + l = k$$

Rozważmy więc dwie figury, jak na rysunku, dające się w sumie rozłożyć na k trójkątów. Postępujemy podobnie jak w przypadku omawianym powyżej. W obu figurach wielokątnych szukamy trójkątów o jednakowych defektach, czyli równoważnych przez rozkład. Jeśli takie trójkąty znajdziemy, to usuwamy je z obu

figur. Zatem wystarczy uzasadnić równoważność przez rozkład części figur pozostałych po usunięciu tych trójkątów. Te pozostałe części mają równe pola i dadzą rozłożyć się łącznie na mniejszą liczbę trójkątów. W tym przypadku na $k - 2$ trójkątów.

Jeśli trójkątów o jednakowym defekcie nie ma, to z obu figur wielokątnych wybieramy trójkąt o najmniejszym defekcie i używając lematu 4.1.1. w jednym z trójkątów drugiej figury wielokątnej umieszczamy trójkąt o takim samym defekcie. Następnie powtarzamy poprzednie rozumowanie i rozważamy figury wielokątne rozłożone łącznie na mniejszą liczbę trójkątów, a dokładnie na $k - 1$ trójkątów. Wiemy, że dla $n < k$ fakt, który mamy udowodnić jest prawdziwy.

Figury powstałe przez usunięcie trójkątów (w obu przypadkach) są z założenia indukcyjnego równoważne przez rozkład. A więc całe figury wyjściowe także są równoważne przez rozkład, bo trójkąty które usuwaliśmy są równoważne przez rozkład i pozostałe po usunięciu części figur wielokątnych też są równoważne przez rozkład ze sobą.

