Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność: matematyka nauczycielska

Anna Koch

Równoważność translacyjna figur wielokątnych.

Praca magisterska
napisana pod kierunkiem
prof. dr hab. Jacka Świątkowskiego

Wrocław 2005

SPIS TREŚCI

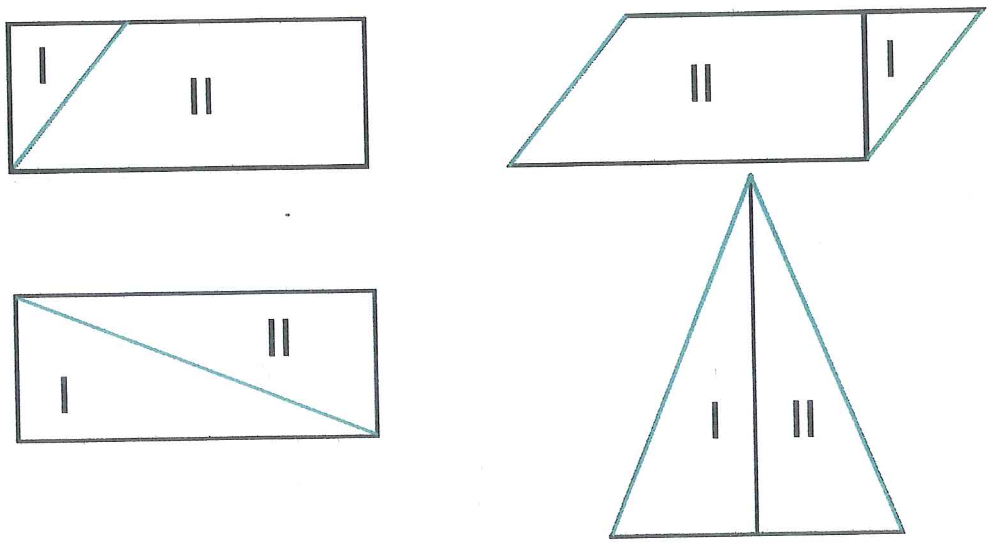
WSTĘP

Praca dotyczy pojęcia równoważności translacyjnej dla figur na płaszczyźnie. Równoważność translacyjna łączy się ze zwykłą równoważnością przez rozkład. Zapewne większość z nas spotkała się już kiedyś z tym pojęciem, jednak dla przypomnienia przytoczę tutaj definicję, którą następnie poprę przykładem

DEFINICJA 0.1

Dwa wielokąty nazywamy równoważnymi przez rozkład wtedy i tylko wtedy, jeśli można je podzielić na mniejsze parami niezachodzące na siebie figury $F_1 = W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_k$ oraz $F_2 = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_k$ w taki sposób, że V_i jest przystająca do W_i dla $i = 1, 2, \ldots, k$

Przykład 0.2



Na podstawie rysunków możemy powiedzieć, że prostokąt jest równoważny przez rozkład trójkątowi i równoległobokowi. Oczywiście od razu widzimy, że aby dwie figury były równoważne przez rozkład muszą mieć równe pola.

Zgodnie z twierdzeniem Bolyai-Herwina równość pól dla wielokątów wystarcza, aby były one równoważne przez rozkład.

Aby móc powiedzieć jak jest z równoważnością translacyjną dla figur wielokątnych muszę przytoczyć najpierw definicję.

DEFINICJA 0.3

Figury wielokątne F_1 i F_2 są równoważne translacyjnie przez rozkład, jeśli można je podzielić na mniejsze parami niezachodzące na siebie figury $F_1 = W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_k$ oraz $F_2 = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_k$ w taki sposób, że V_i jest obrazem W_i przez pewną translację dla $i = 1, 2, \ldots, k$

Celem pracy będzie udowodnienie twierdzenia mówiącego nam, kiedy dwie figury wielokątne są równoważne translacyjnie.

Jednak, aby móc udowodnić to twierdzenie trzeba się zastanowić czy wystarczy nam tutaj tylko równość pól jak przy zwykłej równoważności czy nie? Jakie jeszcze muszą być spełnione warunki, aby dwie figury mogły być równoważne translacyjnie?

Jak się okazuje sama równość pól nie jest wystarczającym warunkiem translacyjnej równoważności. Dla translacyjnej równoważności przez rozkład potrzebna nam jest jeszcze równość pewnych wielkości $L_p(F)$, które będę definiować w rozdziale II.

TWIERDZENIE 0.4

Jeśli figury wielokątne F_1 i F_2 mają równe pola i dla każdej dowolnej obramowanej prostej p zachodzi równość $L_p(F_1) = L_p(F_2)$ to figury F_1 i F_2 są translacyjnie równoważne przez rozkład.

Dwa pierwsze rozdziały pracy wprowadzają nam nowe pojęcia, własności i definicje, z których będę korzystać przy dowodzie Twierdzenia 0.4.

W rozdziale I na początku zostaje wprowadzona definicja figury wielokątnej. Są podane przykłady, które mają nam pomóc w zrozumieniu pojęcia równoważności translacyjnej. Podane również zostają liczne własności figur wielokątnych, które są równoważne translacyjnie przez rozkład.

W rozdziale II poznajemy wielkość $L_p(F)$, która zlicza nam długości wszystkich boków danej figury wielokątnej F równoległych do prostej p (z odpowiednimi znakami). Na przykładach poznajemy własności wielkości $L_p(F)$. Dalej zostają podane twierdzenia pomocnicze, które wykorzystują poznaną w tym rozdziale wielkość.

Częścią właściwą pracy jest rozdział III, w którym zostaje udowodnione twierdzenie o translacyjnej równoważności dwóch figur wielokątnych.

ROZDZIAŁ I. Przykłady figur translacyjnie równoważnych.

W rozdziale I na początku zostaje wprowadzona definicja figury wielokątnej oraz definicja figur równoważnych translacyjnie. Następnie podane są przykłady, które mają nam pomóc w zrozumieniu pojęcia równoważności translacyjnej. Podane zostają również własności figur równoważnych translacyjnie przez rozkład.

DEFINICJA 1.1

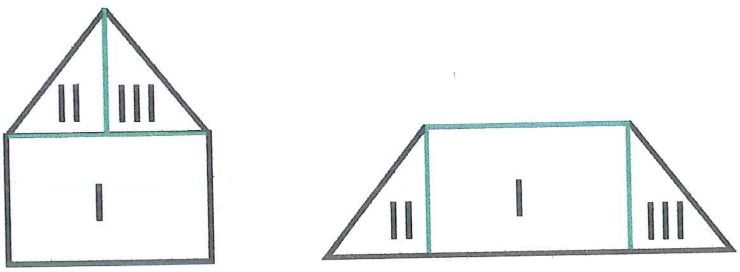
Figurą wielokątną (wielokątem) nazywamy figurę, którą można przedstawić jako sumę skończonej liczby trójkątów parami o rozłącznych wnętrzach.

DEFINICJA 1.2

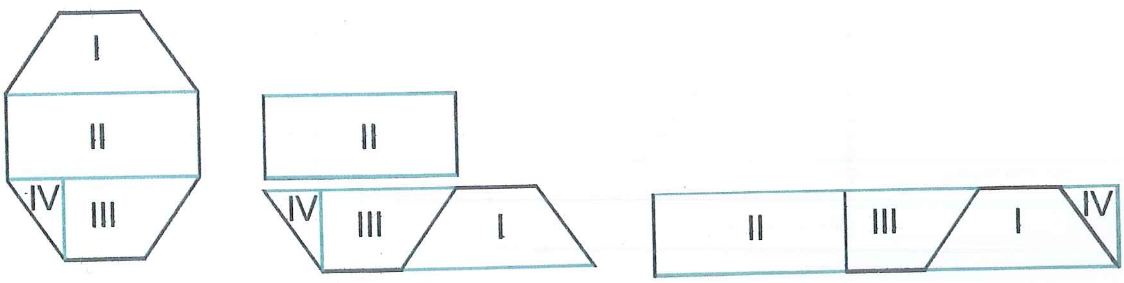
Figury wielokątne F_1 i F_2 są równoważne translacyjnie przez rozkład, jeśli można je podzielić na mniejsze parami niezachodzące na siebie figury $F_1 = W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_k$ oraz $F_2 = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_k$ w taki sposób, że V_i jest obrazem W_i przez pewną translację dla $i = 1, 2, \ldots, k$

<u>Przykłady figur translacyjnie równoważnych przez rozkład 1.3</u>

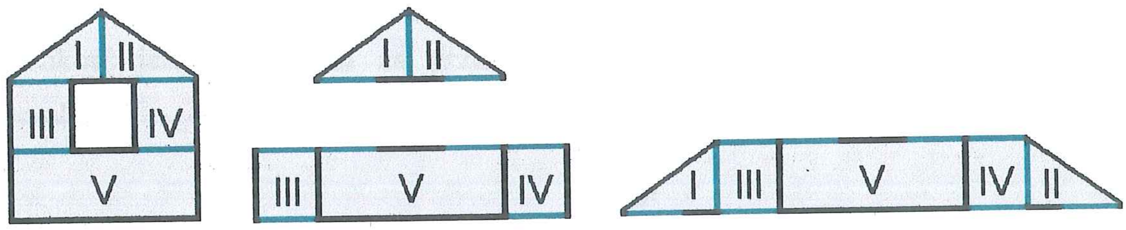
a) Pięciokąt i trapez



b) Ośmiokąt i prostokąt



c) Dziewięciokąt i trapez



WŁASNOŚĆ 1.4

Równoległobok o podstawie długości a i wysokości h jest równoważny translacyjnie przez rozkład prostokątowi o wymiarach boków a i h.

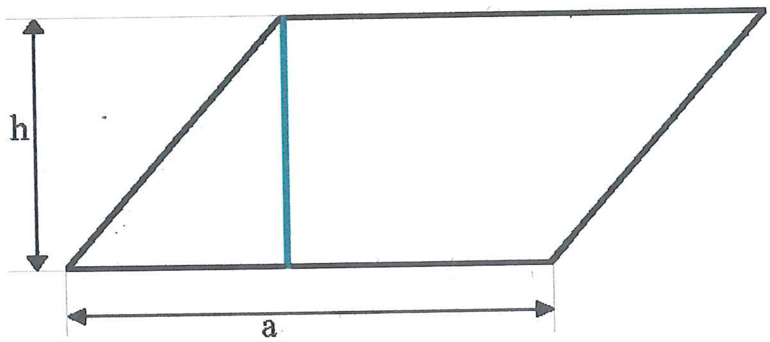
DOWÓD WŁASNOŚCI:

Będziemy rozpatrywać dwa przypadki, kiedy:

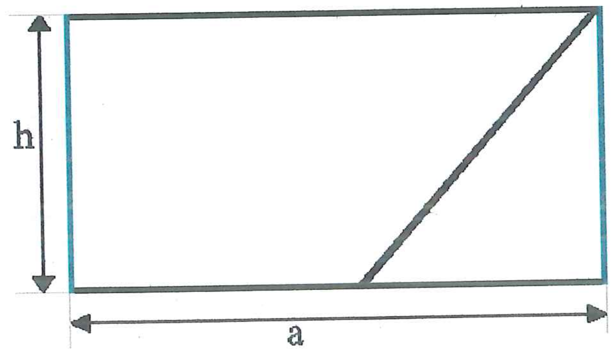
1) wysokość jest opuszczona na podstawę
2) wysokość jest opuszczona na przedłużenie podstawy

ad 1)

Mamy dany dowolny równoległobok o wysokości h i podstawie a.

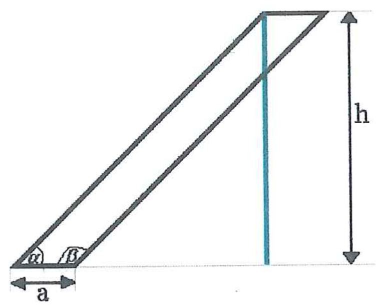


Poprowadźmy teraz wysokość, która będzie opuszczona na podstawę a. Możemy przeciąć teraz nasz równoległobok wzdłuż tej wysokości i przesunąć powstały w ten sposób trójkąt równolegle do podstawy tak, aby powstał prostokąt.

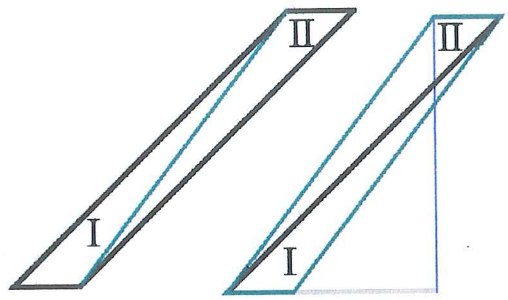


ad 2)

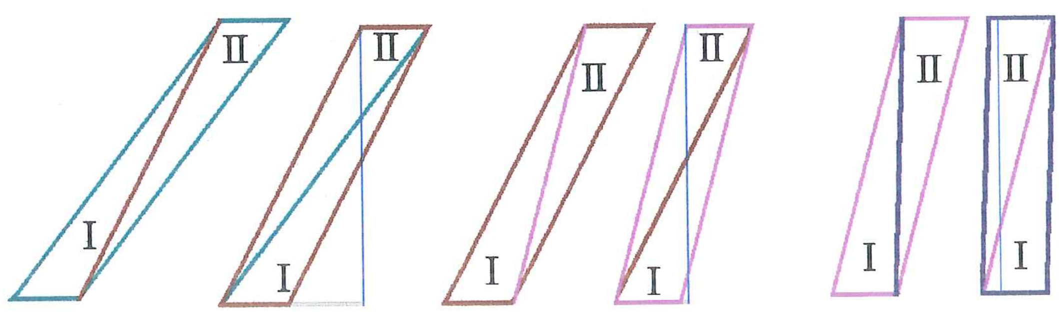
Mamy dany dowolny równoległobok o wysokości h i podstawie a. Wiemy, że wysokość jest opuszczona na przedłużenie podstawy (co jest przedstawione na rysunku).



Tutaj nie możemy postąpić jak poprzednio. Spróbujmy tak przekształcić nasz równoległobok (przez translacyjną równoważność), żeby nie był tak bardzo pochyły. Będziemy go dzielić wzdłuż jednej z przekątnych i uzyskane części łączyć sposób przedstawiony na rysunku.



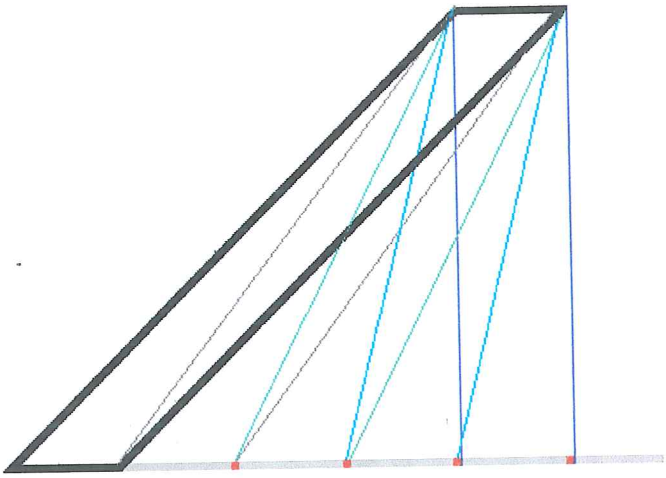
Jednak widzimy, że jeżeli opuścimy wysokość w nowym równoległoboku to dużo się nie zmieni. W dalszym ciągu wysokość będzie opuszczona na przedłużenie podstawy, a nie bezpośrednio na nią. Ten krok musimy więc powtarzać, aż do momentu, gdy wysokość będzie opuszczona na podstawę, a nie na jej przedłużenie (tak jak to widać na rysunku poniżej).



Na tym przykładzie możemy zaobserwować, że miara kąta α za każdym razem się powiększa, zaś miara kąta β maleje. Dzieląc za każdym razem równoległobok wzdłuż przekątnej dzielimy kąt β. Tę część, którą z niego „odcięliśmy" dołączamy do kąta α. Za każdym razem sprawdzamy, czy wysokość równoległoboku będzie już opuszczona na jego podstawę i będziemy wykonywać tę operację dotąd aż się tak stanie (co nam się sprowadza do pierwszego przypadku).

Zastanówmy się teraz czy zawsze tak się stanie, że nasza wysokość będzie w końcu opuszczona na podstawę, a nie na jej przedłużenie.

Mamy dany dowolny równoległobok o podstawie a i wysokości h, która jest opuszczona na przedłużenie podstawy tego równoległoboku. Narysujmy obie wysokości. Odległość pomiędzy nimi równa się długości podstawy czyli a. Poprowadźmy jeszcze prostą, w której zawiera się nasza podstawa. Będziemy na niej odkładać długość a. Będą to kolejno podstawy naszych nowych, mniej pochyłych równoległoboków (sytuacje mamy przedstawioną na rysunku poniżej).



Skoro odległość między wysokościami wynosi a możemy być pewni, że będzie ona opuszczona na podstawę w którymś z naszych przekształconych równoległoboków (ponieważ długość podstawy po przekształceniu równoległoboku się nie zmieni). Wykonując taki rysunek możemy dokładnie określić, za którym razem wysokość w równoległoboku będzie opuszczona już na podstawę, a nie na jej przedłużenie.

WŁASNOŚĆ 1.5

Relacja równoważności translacyjnej przez rozkład jest przechodnia.

DOWÓD:

Oznaczmy sobie relację równoważności translacyjnej przez rozkład dwóch figur wielokątnych F_1 i F_2 jako $\sim$.

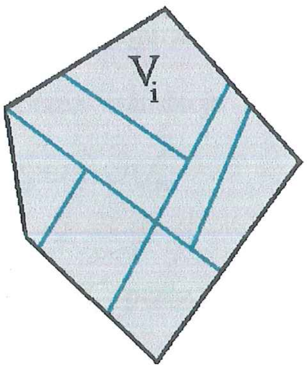
Przechodniość relacji $\sim$ oznacza, że jeżeli F_1 jest równoważna translacyjnie F_2 i F_2 jest równoważna translacyjnie F_3 to F_1 jest równoważna translacyjnie F_3.

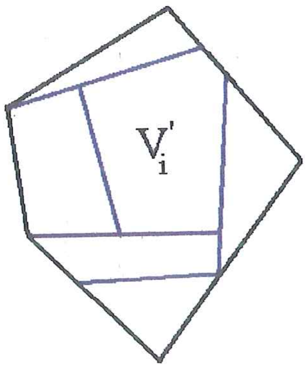
Niech zatem F_1, F_2 i F_3 będą figurami wielokątnymi takimi, że $F_1 \sim F_2$ i $F_2 \sim F_3$.

Z translacyjnej równoważności figur F_1 i F_2 wiemy, że można je podzielić na mniejsze parami niezachodzące na siebie figury wielokątne $F_1 = W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_k$ oraz $F_2 = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_k$ w taki sposób, że V_i jest obrazem W_i przez pewną translację dla $i = 1, 2, \ldots, k$.

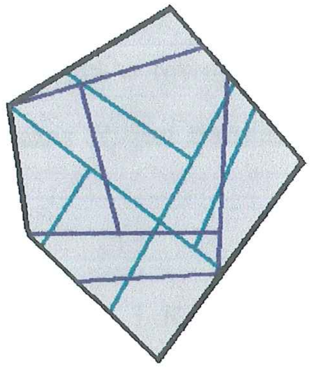
Podobnie figury F_2 i F_3 można podzielić na mniejsze parami niezachodzące na siebie figury wielokątne $F_2 = V_1' \cup V_2' \cup \ldots \cup V_n'$ oraz $F_3 = Q_1 \cup Q_2 \cup \ldots \cup Q_n$ w taki sposób, że Q_i jest obrazem V_i przez pewną translację dla $i = 1, 2, \ldots, n$ (bo F_2 jest równoważne translacyjnie F_3).

Figury F_1, F_2 i F_3 zostały podzielone na mniejsze parami niezachodzące na siebie figury wielokątne. Przy czym podział figury F_2 może być (ale nie musi) za każdym razem inny. Figurę F_2 dzieliliśmy dwa razy najpierw na k, a potem na n różnych części $F_2 = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_k = V_1' \cup V_2' \cup \ldots \cup V_n'$.





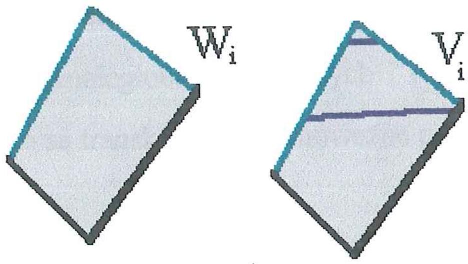
Podzielmy figurę F_2 w jeszcze inny sposób, tak aby podział był jeszcze drobniejszy niż oba poprzednie. Figurę $F_2 = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_k$ przesuńmy translacyjnie na $F_2 = V_1' \cup V_2' \cup \ldots \cup V_n'$ w sposób przedstawiony na rysunku.



Poszczególne figury V_i zostały podzielone na mniejsze części podobnie jak części V_i'.

Po takim podziale nasza figura wielokątna F_2 składa się z m niezachodzących na siebie figur wielokątnych takich, że $F_2 = V_1'' \cup V_2'' \cup \ldots \cup V_m''$ gdzie $m \geq k$ i $m \geq n$.

Części W_i w figurze F_1 dzielimy tak samo, jak podzielone zostały odpowiadające im przez translacje części V_i figury F_2 (w sposób przedstawiony na rysunku poniżej).



Nasza figura F_1 została podzielona na m niezachodzących na siebie figur ($F_1 = W_1'' \cup W_2'' \cup \ldots \cup W_m''$).

Podobnie części Q_i w figurze F_3 dzielimy tak samo jak podzielone zostały odpowiadające im przez translacje części V_i' figury F_2. Dla figury F_3 zachodzi równość $F_3 = Q_1'' \cup Q_2'' \cup \ldots \cup Q_m''$.

Skoro Q_i'' jest obrazem V_i'' przez pewną translację i V_i'' jest obrazem W_i'' przez pewną translację to Q_i'' jest obrazem W_i'' przez pewną translację (jest ona złożeniem dwóch poprzednich translacji) dla $i = 1, 2, \ldots, m$, czyli W_i'' jest równoważne translacyjnie przez rozkład Q_i''.

Relacja równoważności translacyjnej przez rozkład jest więc przechodnia.

WŁASNOŚĆ 1.6

Niech R_1 i R_2 będą równoległobokami o równych i równoległych podstawach oraz jednakowych wysokościach. Wówczas R_1 jest translacyjnie równoważny przez rozkład R_2.

DOWÓD WŁASNOŚCI:

Weźmy dwa dowolne równoległoboki R_1 i R_2 o równych i równoległych podstawach długości a oraz jednakowych wysokościach długości h.

Na mocy Własności 1.4 wiemy, że R_1 jest równoważny translacyjnie przez rozkład prostokątowi o bokach długości a i h. Podobnie na mocy Własności 1.4 wiemy, że R_2 jest równoważny translacyjnie przez rozkład prostokątowi o bokach długości a i h. Wiemy, że R_1 jest równoważny translacyjnie P i R_2 jest równoważny translacyjnie P. Oczywiste jest również, że relacja równoważności translacyjnej jest symetryczna. Korzystając z przechodniości relacji otrzymujemy, że R_1 jest równoważny translacyjnie R_2, czyli dwa dowolne równoległoboki o równych i równoległych podstawach oraz jednakowych wysokościach są translacyjnie równoważne przez rozkład.

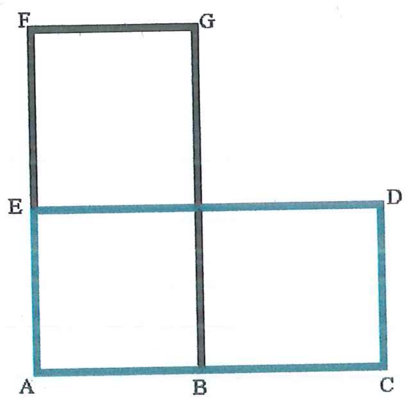
WŁASNOŚĆ 1.7

Niech dany będzie kierunek k oraz dane są prostokąty P_1 i P_2, które mają jedną parę boków równoległych do k. Pola obu prostokątów są równe. Wówczas prostokąty P_1 i P_2 są translacyjnie równoważne przez rozkład.

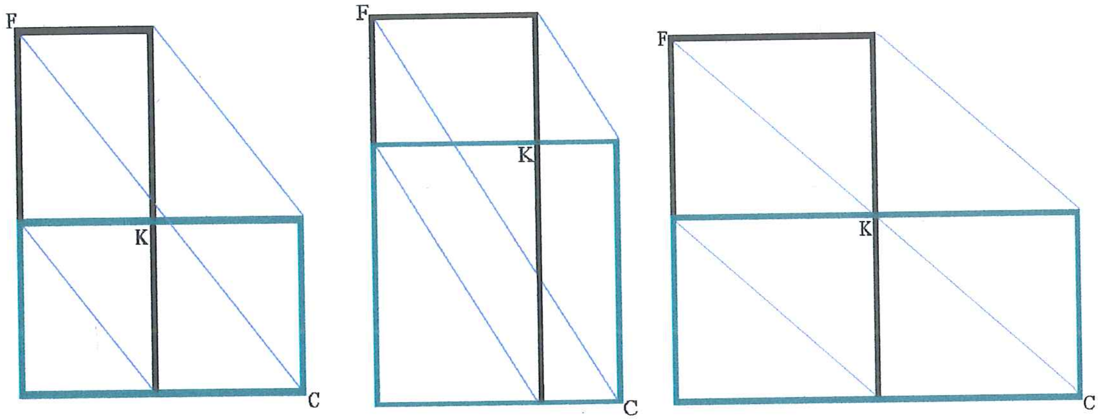
DOWÓD WŁASNOŚCI:

Weźmy sobie dwa dowolne prostokąty o równych polach i o równoległych bokach.

Przesuńmy jeden z prostokątów tak, aby oba miały wspólny jeden kąt prosty.



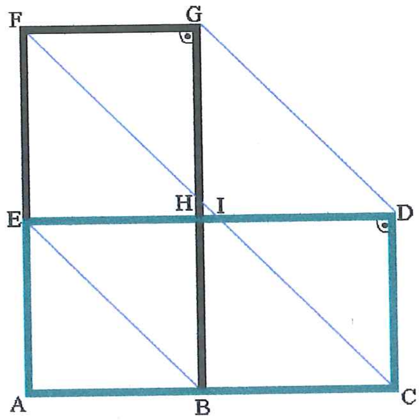
Poprowadźmy odcinki $|BE|$, $|CF|$ i odcinek $|DG|$.



Mamy 3 przypadki:

1) punkt K leży powyżej odcinka $|CF|$
2) punkt K leży poniżej odcinka $|CF|$
3) punkt K leży na odcinku $|CF|$

Dowód przeprowadzę opierając się na przypadku 1, gdy punkt K leży powyżej odcinka $|CF|$. Pozostałe przypadki dowodzi się w analogiczny sposób.



Proste, które poprowadziliśmy podzieliły prostokąty na 3 inne figury:

- Prostokąt $ABGF$ składa się z trójkątów ABE i FGH oraz z równoległoboku $BHFE$.
- Prostokąt $ACDE$ składa się z trójkątów ABE i CDI oraz z równoległoboku $BCIE$.

Aby udowodnić, że prostokąty są translacyjnie równoważne przez rozkład starczy pokazać, że poszczególne figury, z których składa się prostokąt $BHFE$ można przesunąć translacyjnie o dany wektor tak, że nałożą się na figury, które tworzą prostokąt $BCIE$.

Trójkąt ABE jest wspólny dla obu prostokątów.

Sprawdzę teraz, że poprowadzone odcinki są do siebie równoległe.

Wiemy, że $P_1 = P_2$, więc

$$|AC| \cdot |AE| = |AB| \cdot |AF| \quad / \div (|AC| \cdot |AB|)$$

$$\frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|AF|}{|AC|}$$

Z powyższej równości wynika, że $|BE| \,||\, |CF|$ czyli $\sphericalangle ABE = \sphericalangle ACF$

Korzystając z równości pól sprawdzę, że odcinki $|BE|$ i $|DG|$ są równoległe.

$$|AC| \cdot |AE| = |AB| \cdot |AF| \quad / - |AE| \cdot |AB|$$

$$|AC| \cdot |AE| - |AE| \cdot |AB| = |AB| \cdot |AF| - |AE| \cdot |AB|$$

$$|AE| \cdot (|AC| - |AB|) = |AB| \cdot (|AF| - |AE|)$$

$$|AE| \cdot |BC| = |AB| \cdot |EF| \quad / \div (|BC| \cdot |AB|)$$

$$\frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|EF|}{|BC|}$$

Wiemy, że zachodzą następujące równości $|EF| = |GK|$ i $|BC| = |DK|$. Zatem

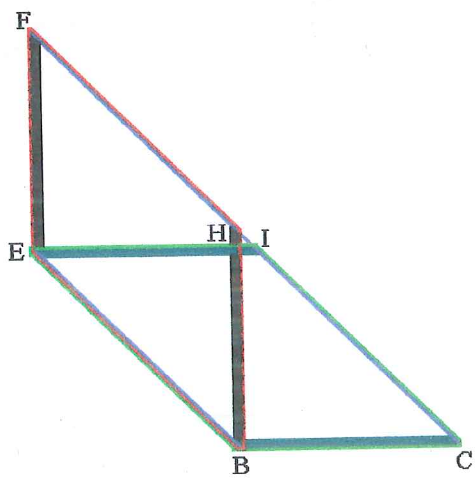
$$\frac{|EF|}{|BC|} = \frac{|GK|}{|DK|} \Rightarrow |BE| \,||\, |DG|$$

Sprawdzę teraz, że $\Delta CEK \equiv \Delta LDF$.

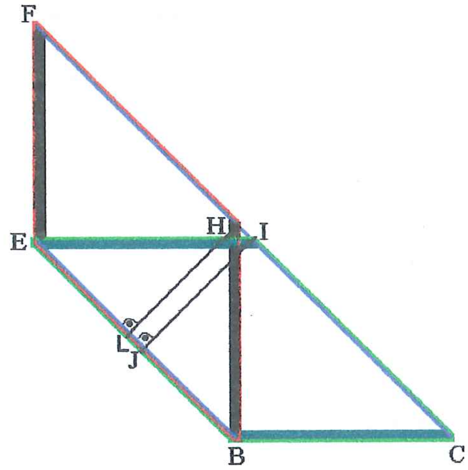
Wiemy, że $|CF| \,||\, |DG|$ oraz $|GH| \,||\, |CD|$. Skoro odcinki $|GH|$ i $|CD|$ znajdują się pomiędzy odcinkami równoległymi i same są do siebie równoległe, to mają taką samą długość $|GH| = |CD|$ i kąty $\sphericalangle DCI = \sphericalangle GHF$. Z cechy kąt bok kąt trójkąt ΔCDH jest przystający do ΔHGF (z dokładnością do translacji).

Udowodnię teraz, że $\square BCIE \equiv \square BHFE$.

Są to równoległoboki, które są położone pomiędzy dwoma równoległymi odcinkami.



Oba równoległoboki maja taką samą podstawę $|BE|$ i wysokość opuszczona na tą podstawę ma taką samą długość (ponieważ są to odcinki prostopadłe do podstawy i leżą pomiędzy prostymi równoległymi).



Na mocy Własności 1.4 równoległobok *BCIE* będzie translacyjnie równoważny przez rozkład prostokątowi o wymiarach $|BE|\times|IJ|$. Podobnie równoległobok *BHFE* będzie translacyjnie równoważny przez rozkład prostokątowi o wymiarach $|BE|\times|HL|$.

Prostokąty o wymiarach $|BE|\times|IJ|$ i $|BE|\times|HL|$ są translacyjnie równoważne przez rozkład. Zachodzi równość odcinków $|HL|=|IJ|$ ponieważ są to odcinki prostopadłe do odcinka $|BE|$ oraz leżą pomiędzy równoległymi odcinkami $|BE|$ i $|CF|$. Oba prostokąty będą przesunięte o wektor równoległy do prostej zawierającej odcinek $|BE|$. Więc te prostokąty będą równoważne translacyjnie przez rozkład.

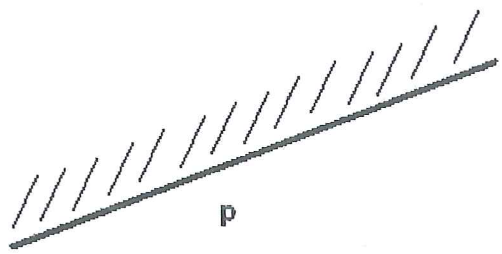
Wiemy, że oba równoległoboki *BCIE* i *BHFE* są równoważne translacyjnie przez rozkład prostokątom o wymiarach odpowiednio $|BE|\times|IJ|$ i $|BE|\times|HL|$. Na mocy przechodniości relacji równoważności translacyjnej, równoległoboki *BCIE* i *BHFE* są równoważne translacyjnie przez rozkład.

ROZDZIAŁ II. Wielkość $L_p(F)$.

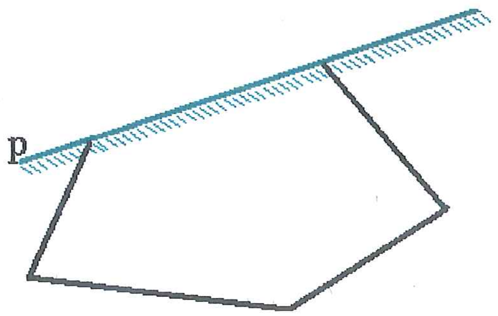
W rozdziale II poznajemy wielkość $L_p(F)$, która zlicza długości wszystkich boków danej figury wielokątnej F równoległych do prostej p. W dalszej części rozdziału poznajemy przykłady, które wykorzystują wielkość $L_p(F)$.

DEFINICJA 2.1

Obramowaną prostą p będziemy nazywać taką prostą, która ma zaznaczoną stronę (obramowanie).



Każdy bok danej figury F leży na jakiejś prostej p, której możemy nadać obramowanie, zgodnie z tym, z której strony figura przylega do tego boku (patrz rysunek).



DEFINICJA 2.2

Bokom równoległym do obramowanej prostej p przyporządkujemy znaki:

1) $+$ gdy bok będzie miał obramowanie zgodne z obramowaniem prostej p
2) $-$ gdy bok będzie miał obramowanie przeciwne do obramowania prostej p.

DEFINICJA 2.3

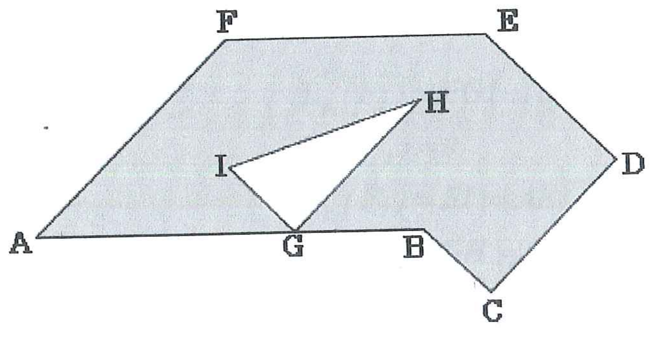
Wielkością $L_p(F)$ nazywamy wielkość, która zlicza długości wszystkich boków figury F, równoległych do prostej p ze znakami określonymi jak powyżej.

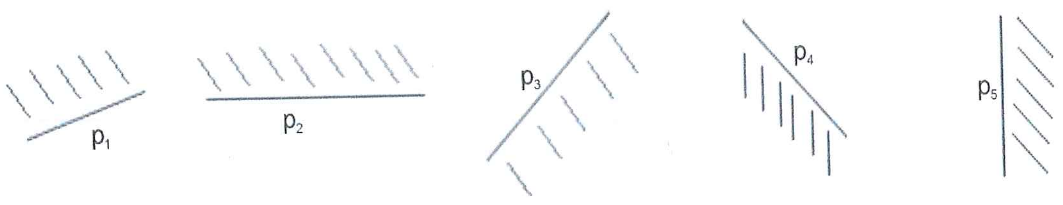
WŁASNOŚCI WILEKOŚCI $L_p(F)$:

1) jeżeli żaden bok figury nie ma kierunku prostej p to $L_p(F)=0$
2) jeżeli figura ma dokładnie dwa boki równoległe do p i są one odpowiednio długości l_1 i l_2, to nasza wielkość $L_p(F)$ wyraża się wzorem:
   - $L_p(F)=l_1+l_2$ jeżeli oba boki mają obramowanie zgodne z obramowaniem prostej p,
   - $L_p(F)=l_1-l_2$ jeżeli pierwszy z boków ma obramowanie zgodne z obramowaniem prostej p, a drugi jest obramowany przeciwne
   - $L_p(F)=-l_1-l_2$ jeżeli oba boki mają obramowanie przeciwne do obramowania prostej p.

Przykład

Rozważmy figurę F taką, że $AF \| GH \| CD, AB \| EF$ *oraz* $DE \| BC \| GI$. Dane mamy obramowane proste p_i przy czym: $p_1 \| HI, p_2 \| AB, p_3 \| AF, p_4 \| DE$. Dla danej figury wielokątnej policzmy wartość $L_p(F)$.





$L_{p_1}(F)=|HI|$

$L_{p_2}(F)=|AB|-|EF|$

$L_{p_3}(F)=|AF|+|GH|-|CD|$

$L_{p_4}(F)=|DE|-|BC|+|GI|$

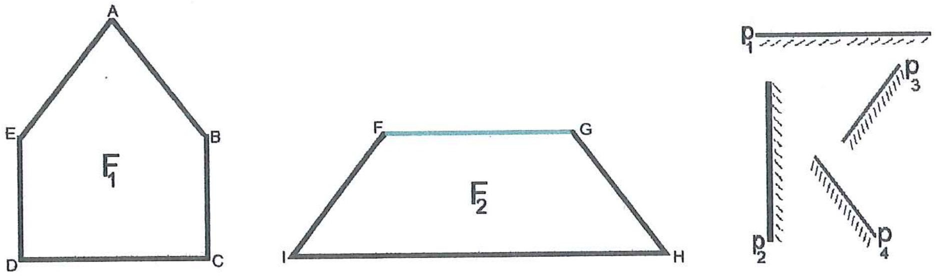
$L_{p_5}(F)=0$

$L_p(F)=0$ dla obramowanych prostych p o kierunkach różnych od kierunków prostych $p_1,\ldots,p_5$.

W rozdziale pierwszym w przykładzie 1.3 zapoznaliśmy się z kilkoma przykładami figur równoważnych translacyjnie przez rozkład. Wiemy, że wszystkie figury, które tam przedstawiliśmy mają równe pola. Policzmy teraz dla każdej figury z przykładu 1.3 wartość $L_p(F)$ dla każdego kierunku prostej p.

Przykład 2.4

a) Pięciokąt i trapez



$L_{p_1}(F_1)=-|CD|$

$L_{p_2}(F_1)=|DE|-|BC|=0$

$L_{p_3}(F_1)=|AE|$

$L_{p_4}(F_1)=|AB|$

$L_{p_1}(F_2)=|FG|-|HI|=|FG|-2\cdot|FG|=-|FG|=-|CD|$

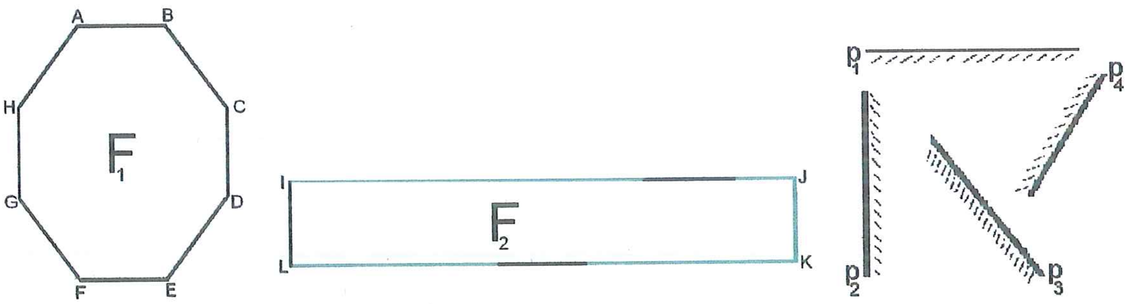
$L_{p_2}(F_2)=0$

$L_{p_3}(F_2)=|FI|=|AE|$

$L_{p_4}(F_2)=|GH|=|AB|$

Ponadto $L_p(F_1)=L_p(F_2)=0$ dla wszystkich obramowanych prostych p o innych kierunkach.

b) Ośmiokąt i prostokąt



$L_{p_1}(F_1)=|AB|-|EF|=0$ $\quad$ $L_{p_1}(F_2)=|IJ|-|KL|=0$

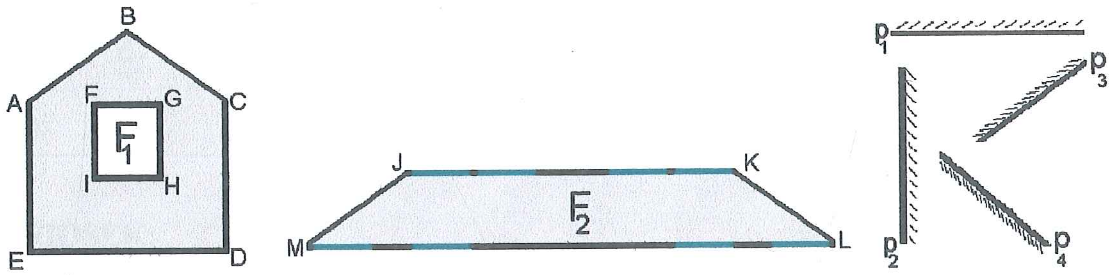
$L_{p_2}(F_1)=|GH|-|CD|=0$ $\quad$ $L_{p_2}(F_2)=|IL|-|JK|=0$

$L_{p_3}(F_1)=|BC|-|FG|=0$ $\quad$ $L_{p_3}(F_2)=0$

$L_{p_4}(F_1)=-|AH|+|DE|=0$ $\quad$ $L_{p_4}(F_2)=0$

Ponadto $L_p(F_1)=L_p(F_2)=0$ dla wszystkich obramowanych prostych p o innych kierunkach.

c) Dziewięciokąt i trapez



$L_{p_1}(F_1)=|FG|-|HI|+|DE|=|DE|$ $\quad$ $L_{p_1}(F_2)=|LM|-|JK|=|DE|+|JK|-|JK|=DE|$

$L_{p_2}(F_1)=|AE|-|FI|+|GH|-|CD|=0$ $\quad$ $L_{p_2}(F_2)=0$

$L_{p_3}(F_1)=-|AB|$ $\quad$ $L_{p_3}(F_2)=-|JM|=-|AB|$

$L_{p_4}(F_1)=|BC|$ $\quad$ $L_{p_4}(F_2)=|KL|=|BC|$

Ponadto $L_p(F_1)=L_p(F_2)=0$ dla wszystkich obramowanych prostych p o innych kierunkach.

Jak widać w każdym przykładzie obie figury mają takie same wartości $L_p(F)$ dla wszystkich obramowanych prostych p. Obserwację tę można uogólnić do następującego twierdzenia.

TWIERDZENIE 2.5

Figury translacyjnie równoważne przez rozkład mają jednakowe wielkości $L_p(F)$ dla wszystkich obramowanych prostych p.

DOWÓD TWIERDZENIA:

Na podstawie Definicji 1.2, wiemy że figury wielokątne F_1 i F_2 są równoważne translacyjnie przez rozkład, jeśli można je podzielić na mniejsze parami niezachodzące na siebie figury $F_1 = W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_k$ oraz $F_2 = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_k$ w taki sposób, że V_i jest obrazem W_i przez pewną translację dla $i = 1, 2, \ldots, k$

Stwierdzenie: V_i jest obrazem W_i przez pewną translację oznacza, że są to te same figury (przesunięte o pewien wektor). Znaczy to, że mają jednakowe wartości $L_p(W_i) = L_p(V_i)$ dla $i = 1, 2, \ldots, k$ dla dowolnej obramowanej prostej p. Wystarczy teraz pokazać, że jeśli figurę F rozkładamy na parami niezachodzące na siebie figury wielokątne $W_1, W_2, \ldots, W_n$ to dla każdego obramowanego p zachodzi równość $L_p(F) = \sum_{i=1}^{n} L_p(W_i)$, co będzie udowodnione w dalszej części pracy (dowód Lematu 2.6).

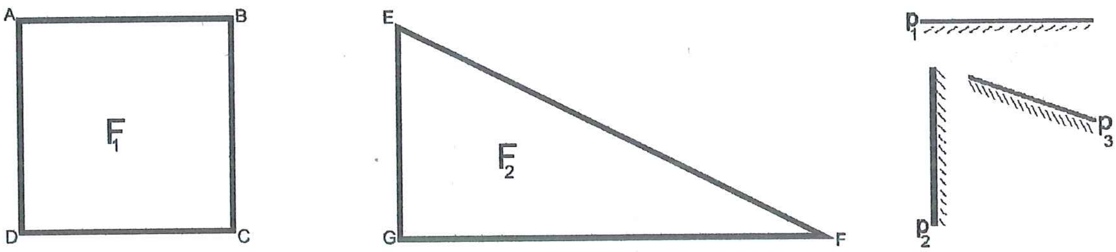
WNIOSEK:

Jeśli dla dwóch figur wielokątnych F_1 i F_2 oraz dla pewnej obramowanej prostej p wielkości $L_p(F_1)$ i $L_p(F_2)$ są różne to figury F_1 i F_2 nie są translacyjnie równoważne przez rozkład.

Przykład

Mamy dany kwadrat i trójkąt prostokątny o równych polach, przy czym $2 \cdot |AB| = |FG|$.

Policzmy $L_{p_i}(F)$.



$L_{p_1}(F_1) = |AB| - |CD| = 0$ $\qquad$ $L_{p_1}(F_2) = |EG| = |AB|$

$L_{p_2}(F_1) = |AD| - |BC| = 0$ $\qquad$ $L_{p_2}(F_2) = |FG| = 2 \cdot |AB|$

$L_{p_3}(F_1) = 0$ $\qquad$ $L_{p_3}(F_2) = |EF|$

Od razu możemy zauważyć, że $L_{p_1}(F_1) \neq L_{p_1}(F_2)$, $L_{p_2}(F_1) \neq L_{p_2}(F_2)$, $L_{p_3}(F_1) \neq L_{p_3}(F_2)$. Figury nie są więc równoważne translacyjnie. Oczywiście, aby wykazać, że figury nie są równoważne translacyjnie przez rozkład starczy pokazać, że $L_p(F_1) \neq L_p(F_2)$ dla jednej dowolnej obramowanej prostej p.

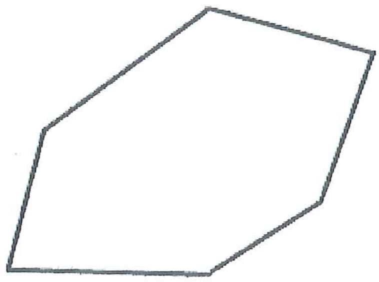
Kolejny lemat będzie dotyczył własności wspomnianej w dowodzie Twierdzenia 2.5 i brakującej do uczynienia tego dowodu kompletnym.

LEMAT 2.6

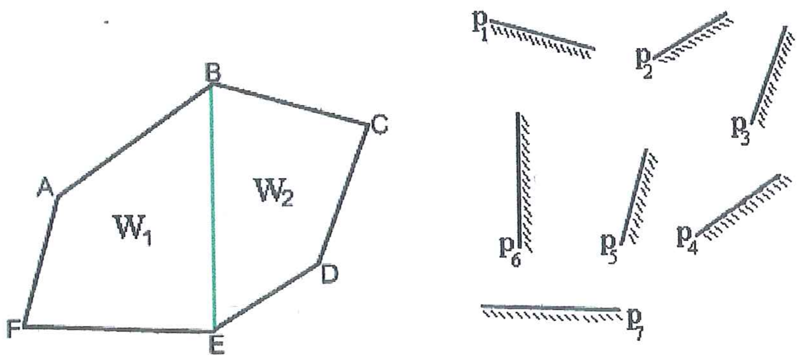
Jeśli figurę F rozkładamy na parami niezachodzące figury W_1, W_2, ..., W_n to dla każdej obramowanej prostej p zachodzi równość $L_p(F)=\sum_{i=1}^{n} L_p(W_i)$.

Ilustracja treści lematu na przykładzie

Weźmy dowolną figurę wielokątną F.



Podzielmy ją dowolnie na dwie niezależne figury wielokątne W_1 i W_2.



Policzymy teraz wielkość L_p dla figur W_1 i W_2.oraz dla figury F.

$L_{p_2}(W_1)=0$	$L_{p_2}(W_2)=\|BC\|$	$L_{p_1}(F)=\|BC\|$
$L_{p_2}(W_1)=0$	$L_{p_2}(W_2)=-\|DE\|$	$L_{p_2}(F)=-\|DE\|$
$L_{p_3}(W_1)=0$	$L_{p_3}(W_2)=-\|CD\|$	$L_{p_3}(F)=-\|CD\|$
$L_{p_4}(W_1)=\|AB\|$	$L_{p_4}(W_2)=0$	$L_{p_4}(F)=\|AB\|$
$L_{p_5}(W_1)=\|AF\|$	$L_{p_5}(W_2)=0$	$L_{p_5}(F)=\|AF\|$

$L_{p_6}(W_2)=-|BE|$ $\quad$ $L_{p_6}(W_2)=|BE|$ $\quad$ $L_{p_6}(F)=0$

$L_{p_7}(W_2)=-|EF|$ $\quad$ $L_{p_7}(W_2)=0$ $\quad$ $L_{p_7}(F)=-|EF|$

Następnie wyliczmy teraz wielkość L_p (dla każdej obramowanej prostej p) dla figury F korzystając ze wzoru $L_p(F)=\sum_{i=1}^{n} L_p(W_i)$.

$$L_p(F)=\sum_{i=1}^{n} L_p(W_i)=L_{p_1}(W_1)+L_{p_1}(W_2)+L_{p_2}(W_1)+L_{p_2}(W_2)+L_{p_3}(W_1)+L_{p_3}(W_2)+$$
$$+L_{p_4}(W_1)+L_{p_4}(W_2)+L_{p_5}(W_1)+L_{p_5}(W_2)+L_{p_6}(W_1)+L_{p_6}(W_2)+L_{p_7}(W_1)+L_{p_7}(W_2)=$$
$$=0+|BC|+0-|DE|+|AB|+0+|AF|+0-|BE|+|BE|-|EF|+0=|BC|-|DE|+|AB|+$$
$$+|AF|-|EF|$$

Jak widzimy długość boku $|BE|$ nam się zredukowała. Jak będziemy liczyć sumę poszczególnych wielkości L_i dla obydwóch figur, to najpierw musimy dodać, a potem odjąć długość boku $|BE|$, co daje w sumie zero. Wynika to z faktu, że obramowania boku BE są w obydwóch figurach do siebie przeciwne (bok BE jest wspólny dla figury W_1 i W_2).

DOWÓD LEMATU 2.6:

Podzielmy figurę F na dowolne niezachodzące na siebie figury wielokątne W_i gdzie $i=1, 2, \ldots, k$. Policzmy teraz wkład w $\sum L_p(W_i)$ od krawędzi zewnętrznych i wewnętrznych figury F.

Wkład w $\sum L_p(W_i)$ pochodzący od zewnętrznych krawędzi figury F (będących też zewnętrznymi krawędziami w odpowiednich figurach W_i) jest równy wielkości $L_p(F)$. Starczy więc pokazać, że dla dowolnej obramowanej prostej p wkład do wielkości $\sum L_p(W_i)$ pochodzący od wewnętrznych krawędzi figury F (czyli tych krawędzi figur W_i, które leżą wewnątrz F i są tym samym krawędziami podziału F na części W_i) wynosi zero.

Weźmy sobie jeden z odcinków $|AB|$ podziału figury F, który jest równoległy do prostej p. Pojawia się on jako bok w kilku figurach W_i, które będą do niego przylegać z obu stron. Ze strony, która jest zgodna z obramowaniem prostej p odcinek został podzielony na s mniejszych odcinków o równych lub różnych długościach $l_1, l_2, \ldots, l_s$.

Z drugiej strony odcinek $|AB|$ jest podzielony na t mniejszych odcinków o równych lub różnych długościach $l'_1, l'_2, \ldots, l'_t$.

Policzmy teraz, jaki jest wkład do wielkości $\sum L_p(W_i)$ pochodzący od odcinka $|AB|$. Wynosi on $l_1 + l_2 + \ldots + l_s - l'_1 - l'_2 - \ldots - l'_t$. Wiemy jednak, że długość odcinka $|AB|$ możemy zapisać na dwa różne sposoby: $|AB| = l_1 + l_2 + \ldots + l_s = l'_1 + l'_2 + \ldots + l'_t$. Zatem $l_1 + l_2 + \ldots + l_s - l'_1 - l'_2 - \ldots - l'_t = l_1 + l_2 + \ldots + l_s - (l'_1 + l'_2 + \ldots + l'_t) = |AB| - |AB| = 0$. Dla innych odcinków równoległych do prostej p ich wkład do wielkości $\sum L_p(W_i)$ możemy policzyć w analogiczny sposób. Za każdym razem wkład z wewnętrznych odcinków będzie wynosił zero. Podobnie będzie również dla każdego kierunku prostej p.

Ostatecznie więc wkład pochodzący od wewnętrznych krawędzi figury F nic nam nie wniesie nowego do naszej sumy. Dla każdej obramowanej prostej p zachodzi więc równość $L_p(F) = \sum_{i=1}^{n} L_p(W_i)$.

ROZDZIAŁ III. Dowód twierdzenia o translacyjnej równoważności figur wielokątnych.

Na początku rozdziału III zostanie podane twierdzenie o figurach równoważnych translacyjnie przez rozkład. Dalsza cześć rozdziału jest dowodem podanego twierdzenia.

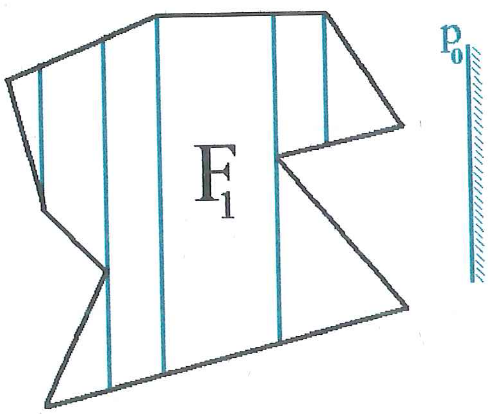
TWIERDZENIE 3.1

Jeśli figury F_1 i F_2 mają równe pola $L_p(F_1)=L_p(F_2)$ i to figury F_1 i F_2 są translacyjnie równoważne przez rozkład.

DOWÓD:

Mamy dane figury F_1 i F_2, które mają równe pola i jednakowe wielkości $L_p(F)$ dla każdego p.

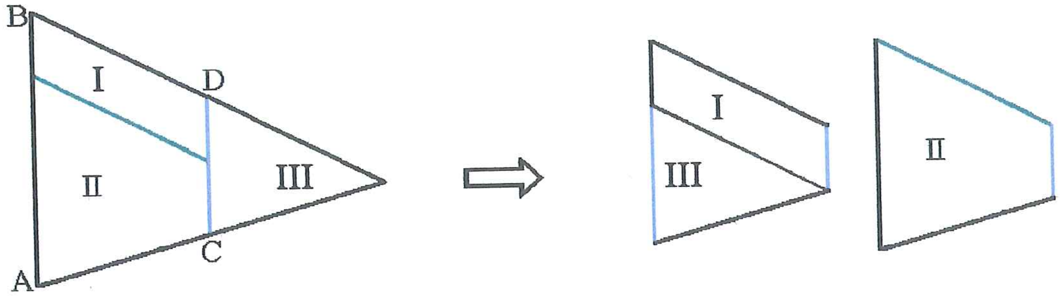
A) Wybieramy sobie dowolną prostą p_0 o dowolnym kierunku. Z każdego wierzchołka figury F_1 prowadzimy prostą równoległą do naszej prostej p_0. W ten sposób następuje podział figury F_1 na trójkąty i trapezy.



Wszystkie trapezy, jakie otrzymaliśmy mają podstawy równoległe do prostej p_0.

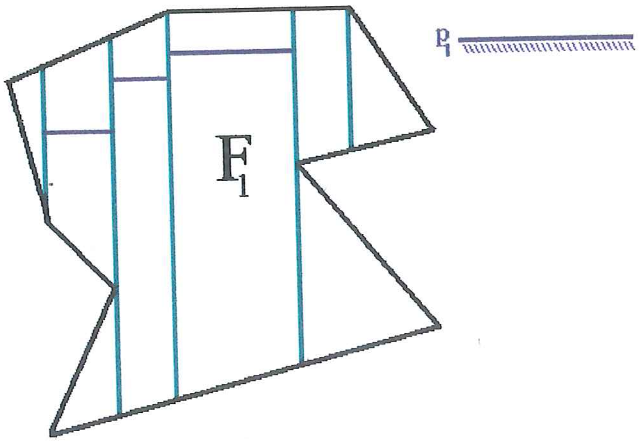
W dalszej części dowodu prostą p_0 będzie prosta, którą wybraliśmy tutaj.

B) Figura F_1 jest teraz sumą niezachodzących na siebie trójkątów i trapezów. Każdy trójkąt jaki otrzymaliśmy powyżej dzielimy wzdłuż innej prostej p i łączymy w trapezy. Teraz w podziale figury F_1 będą występowały same trapezy. Można to zrobić w sposób przedstawiony na rysunku.

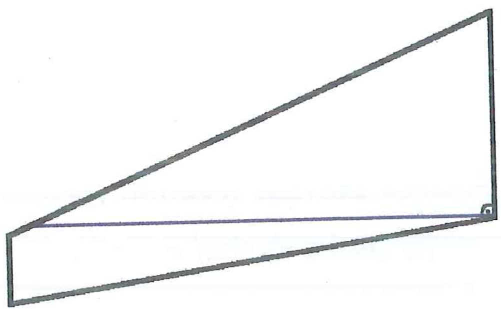


Odcinki $|AB|$ i $|CD|$ są równoległe do prostej p_0. Powstałe trapezy będą więc miały podstawy równoległe do prostej p_0.

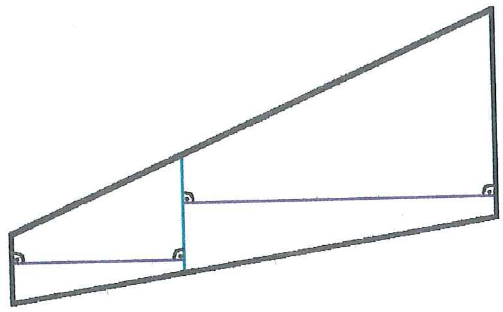
C) Wybieramy prostą p_1, która jest prostopadła do naszej prostej p_0. Każdy trapez rozcinamy wzdłuż prostej równoległej do prostej p_1, tak aby powstały same trapezy prostokątne.



Problem jaki może się pojawić przy takim podziale, to jak rozciąć bardzo pochyły trapez. Gdy podzielimy go wzdłuż prostej równoległej do prostej p_1 powstanie nam trójkąt i czworokąt różny od trapezu.



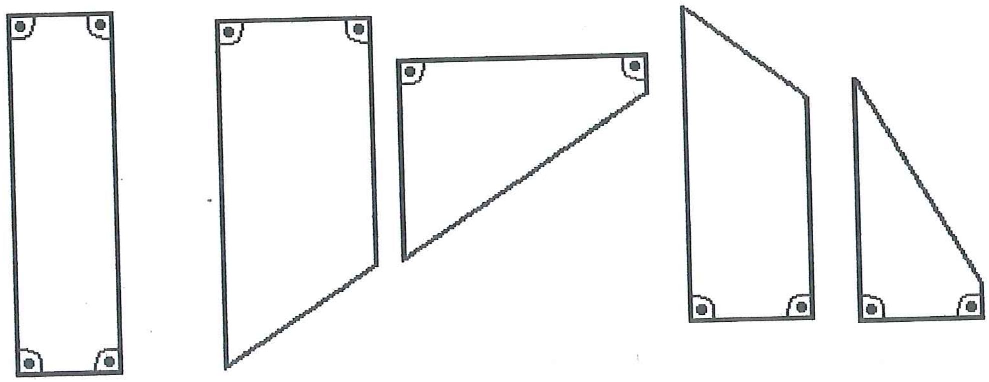
Aby pozbyć się tego problemu dzielimy nasz trapez wzdłuż prostej równoległej do prostej p_0, tak żeby nie był już tak bardzo pochyły (co jest przedstawione na rysunku poniżej)



Dalej postępujemy jak z innymi trapezami.

Teraz kroki A) – C) wykonujemy dla figury F_2.

Po wykonaniu operacji A) – C) figury F_1 i F_2 zostały podzielone na trapezy prostokątne i prostokąty.

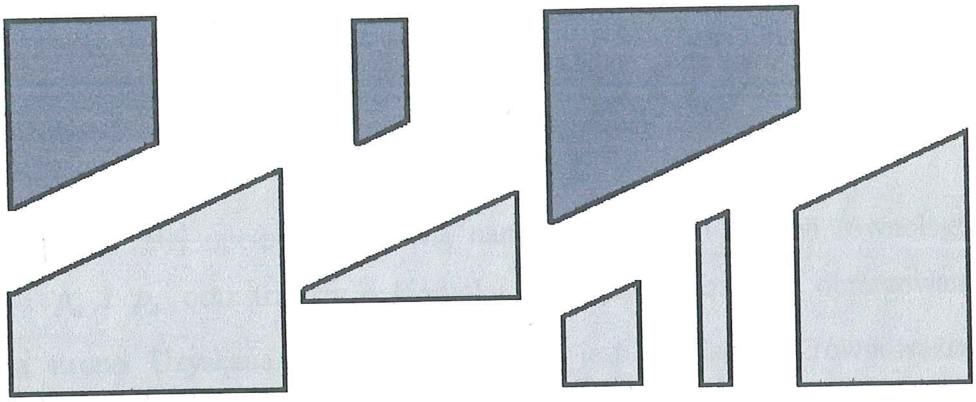


Nasze trapezy będą miały następujące własności:

- Podstawy są równoległe do prostej p_0
- Przynajmniej jedna z krawędzi bocznych ma kierunek p_1 (gdy dwie to będzie to prostokąt)
- Druga krawędź boczna może mieć kierunek r różny od p_0 i p_1 (lub p_1 gdy będzie prostokąt)

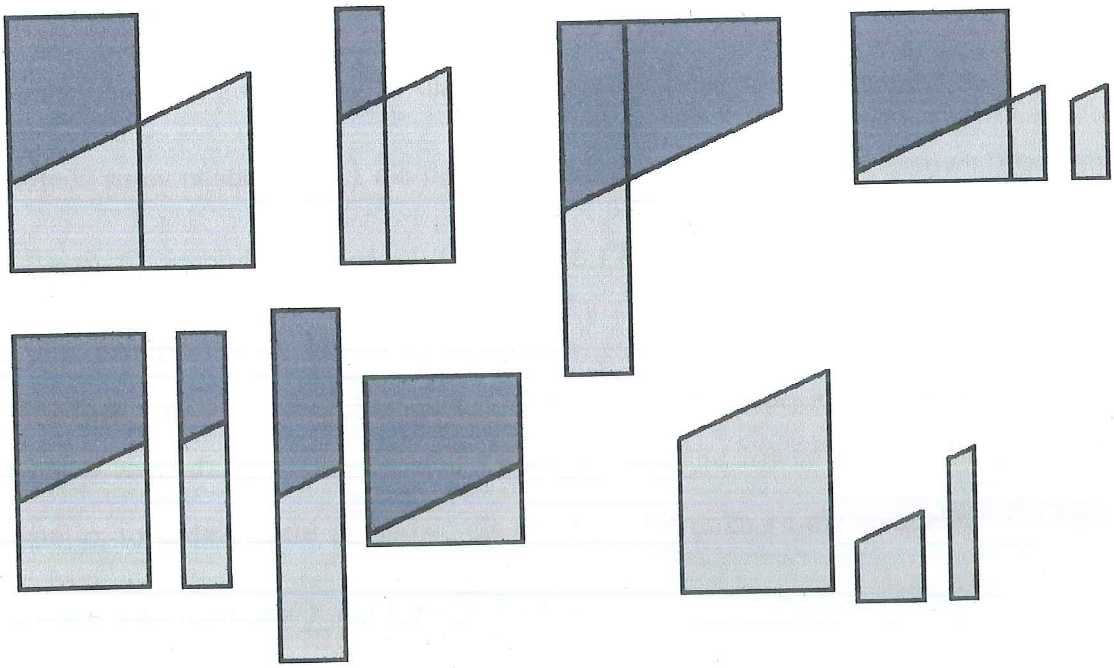
<u>Kierunkiem charakterystycznym</u> będziemy nazywać kierunek r tej krawędzi bocznej, która nie jest ani prostopadła ani równoległa do prostej p_0.

D) Dla figury F_1 ustalamy kierunek charakterystyczny prostej r i wybieramy spośród wszystkich trapezów te, które mają dany kierunek charakterystyczny r.



Jeśli wszystkie trapezy mają jednakowe obramowania na bokach o kierunku r to przechodzimy do następnego kroku E).

Jeśli nie, to dopasowujemy dowolne dwa trapezy z przeciwnymi obramowaniami na bokach o kierunku r. Powstanie nam figura, która albo jest prostokątem albo składa się z prostokąta i trapezu. Prostokąty przesuwamy translacyjnie na bok. Jeżeli figura składa się z prostokąta i trapezu to dzielimy naszą figurę wzdłuż prostej równoległej do prostej p_0, tak aby pozostał na trapez i prostokąt. Z prostokątem postępujemy jak poprzednio – przesuwamy translacyjnie na bok, a do pozostałego trapezu dobieramy trapez z przeciwnym kierunkiem charakterystycznym (tak jak to widać na rysunku przedstawionym poniżej).



Za każdym razem jak wykonamy tę operację pozostanie nam o jeden trapez mniej (o kierunku charakterystycznym r). Trapezów jest skończona liczba, więc operację wykonamy w skończonej liczbie kroków. Czynność wykonujemy dopóki będziemy mieć trapezy o przeciwnie obramowanym kierunku charakterystycznym.

Czynności, które tutaj wykonujemy (rozcinanie, dobieranie w pary, przesuwanie wzdłuż jakiegoś wektora) są dopuszczane w ramach równoważności translacyjnej przez rozkład.

Po wykonaniu całej operacji pozostaną nam prostokąty o bokach równoległych do prostych p_0 i p_1 oraz trapezy o kierunku charakterystycznym r obramowane tylko w jedną stronę. Uzyskana w ten sposób figura jest translacyjnie równoważna przez rozkład z wyjściową figurą F_1.

Postępujemy tak dla każdego kierunku charakterystycznego prostej r.

Takie same czynności wykonujemy dla figury F_2.

E) Teraz zajmiemy się porównaniem figur F_1 i F_2.

Spośród wszystkich trapezów, które składają się na figury F_1 i F_2 wybieramy te, które mają jednakowy kierunek charakterystyczny r. Pozostałe trapezy przesuwamy translacyjnie na bok. Przyjmijmy na razie, że figura F_1 składa się z k trapezów $T_1, T_2, \ldots, T_k$ zaś figura F_2 składa się z m trapezów $T_1', T_2', \ldots, T_m'$ o tym samym kierunku charakterystycznym r.

Na mocy Lematu 2.6 wiemy, że dla figury F_1 zachodzi równość $L_r(F_1)=\sum_{i=1}^{k} L_r(T_i)$.

Składniki sumy postaci $L_r(V)$ dla pozostałych figur V podziału F_1 są zerowe. Podobnie dla figury F_2 zachodzi równość $L_r(F_2)=\sum_{i=1}^{m} L_r(T_i')$ oraz składniki sumy postaci $L_r(V)$ dla pozostałych figur V podziału F_2 są zerowe.

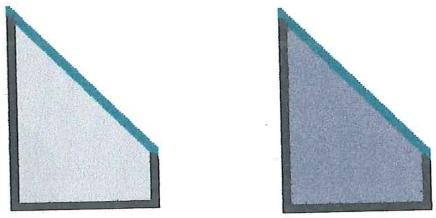
Z założenia naszego Twierdzenia 3.1 wiemy, że dla każdej dowolnej obramowanej prostej p zachodzi równość $L_p(F_1)=L_p(F_2)$. Jeżeli ta równość zachodzi dla każdej prostej p, to będzie także zachodzić dla prostej o kierunku r i dla podziałów obu figur.

Zachodzi więc równość $\sum_{i=1}^{k} L_r(T_i)=\sum_{i=1}^{l} L_r(T_i')$.

Na tej podstawie i tego, że wszystkie $T_1, T_2, \ldots, T_k$ oraz $T_1', T_2', \ldots, T_m'$ są obramowane w jedną stronę możemy wyciągnąć wniosek, że sumy długości krawędzi charakterystycznych dla figur wielokątnych F_1 i F_2 są jednakowe.

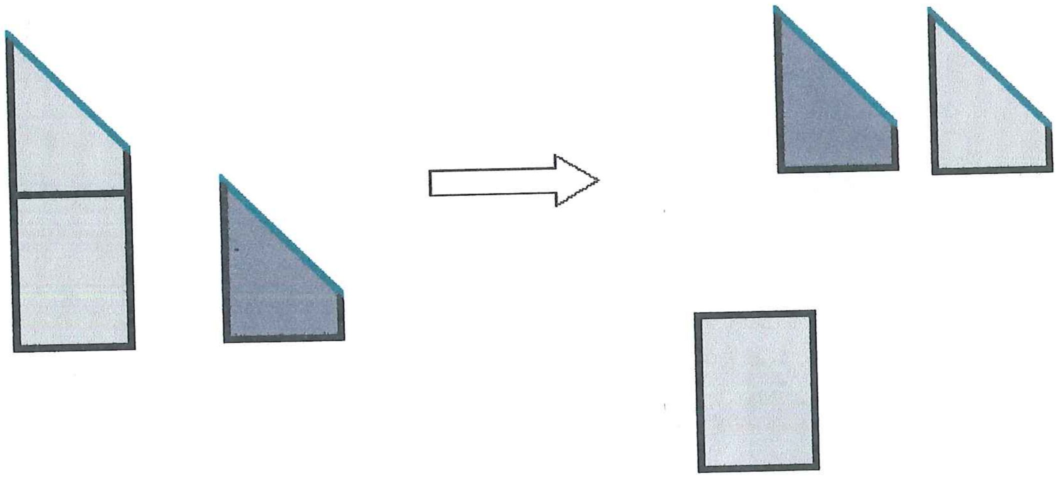
Bierzemy teraz po jednym trapezie o kierunku charakterystycznym r z figur F_1 i F_2 i przyrównujemy je do siebie. Mogą zdarzyć się następujące sytuacje.

1) Przyrównane trapezy mogą całkowicie się pokryć



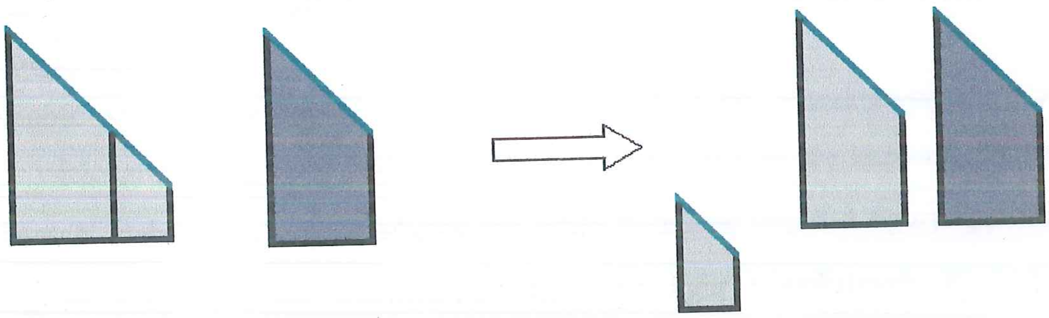
Wtedy przesuwamy je wzdłuż pewnego wektora na bok i porównujemy kolejne dwa trapezy.

2) Po porównaniu trapezów pozostanie nam jeszcze prostokąt



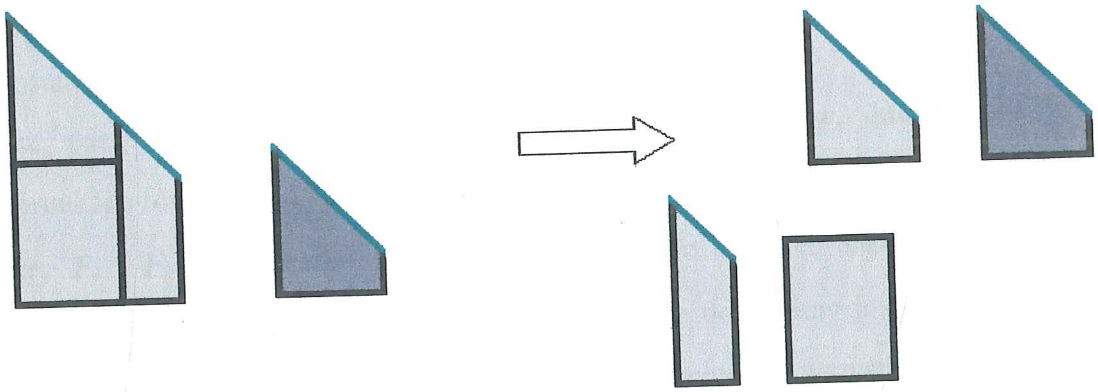
Prostokąt przesuwamy translacyjnie na bok do innych prostokątów, a dobrane trapezy do wcześniej sparowanych już trapezów.

3) Po porównaniu trapezów pozostanie nam trapez o kierunku charakterystycznym r



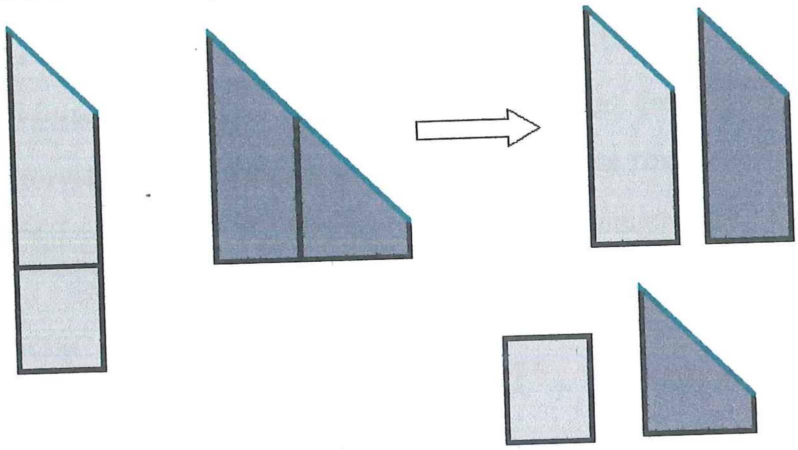
Dobrane trapezy przesuwamy translacyjnie na bok do pozostałych sparowanych ze sobą trapezów. Do pozostałego trapezu dobieramy trapez z drugiej figury o kierunku charakterystycznym r.

4) Po porównaniu trapezów pozostanie nam trapez o kierunku charakterystycznym r i prostokąt



Dla poszczególnych części postępujemy jak w sytuacjach 2) i 3)

5) Po porównaniu trapezów z jednego trapezu pozostanie nam prostokąt, a z drugiego trapez o kierunku charakterystycznym r.



Dobrane trapezy przesuwamy translacyjnie na bok do pozostałych sparowanych trapezów. Prostokąt przesuwamy translacyjnie do innych prostokątów. Pozostaje nam jeszcze trapez, do którego dobieramy inny trapez o kierunku charakterystycznym r (z drugiej figury).

Czynność wykonujemy dopóki wszystkie trapezy o kierunku charakterystycznym r dla figur wielokątnych F_1 i F_2 będą dobrane w pary (to znaczy, że każdemu trapezowi z figury F_1 dobierzemy odpowiadający mu przez translację trapez z figury F_2). Wiemy także, że sumy krawędzi charakterystycznych dla figur wielokątnych F_1 i F_2 są jednakowe. Dlatego po sparowaniu wszystkich trapezów o kierunku charakterystycznym r nie pozostanie nam już żadna figura lub pozostaną nam tylko prostokąty.

Za każdym razem jak wykonamy tę operację będziemy mieć co najmniej o jeden trapez mniej do porównania (o kierunku charakterystycznym r). Trapezów jest skończona liczba, więc operację wykonamy w skończonej liczbie kroków.

Postępujemy tak dla każdego kierunku charakterystycznego r. Za każdym razem pozostaną nam tylko prostokąty i sparowane trapezy.

Teraz nasze figury F_1 i F_2 składają się z prostokątów, które mają boki o kierunkach równoległych do p_0 i p_1 oraz dobranych w pary trapezów.

Figury F_1 i F_2 mają równe pola. Wszystkie trapezy o kierunku charakterystycznym r z figur F_1 i F_2 również mają równe pola, ponieważ dobraliśmy je w przystające do siebie pary. Na tej podstawie możemy powiedzieć, że suma pól wszystkich prostokątów, z których składają się figury F_1 i F_2 będzie równa.

Po wykonaniu kroku E) mamy dobrane w pary trapezy z figur F_1 i F_2 oraz prostokąty, które mają boki o kierunkach równoległych do p_0 i p_1. Dobrane w pary trapezy są równoważne translacyjnie przez rozkład. Musimy, więc jeszcze udowodnić, że prostokąty, z których jeszcze składają się figury F_1 i F_2, są równoważne translacyjnie przez rozkład. Dlatego w kroku F) zajmujemy się już tylko tymi prostokątami.

F) **WŁASNOŚĆ**

Niech dany będzie kierunek k oraz dane są figury F_1 i F_2, z których każda jest rozłączną sumą prostokątów o jednej parze boków równoległych do k. Załóżmy, że pola figur F_1 i F_2 są równe. Wówczas figury te są translacyjnie równoważne przez rozkład.

DOWÓD

Daną mamy figurę F_1, która jest sumą rozłącznych prostokątów $P_1, P_2, \ldots, P_n$ o jednej parze boków równoległych do danej prostej k.

Dowolny prostokąt P_i dla $i = 1, 2, \ldots, n$ o wymiarach $a_i \times h_i$ będzie równoważny translacyjnie przez rozkład prostokątowi, który ma podstawę równą 1 i wysokość równą $a_i \cdot h_i$ oraz jego podstawa jest równoległa do prostej k (na mocy Własności 1.7).

Przekształćmy w ten sposób każdy z prostokątów $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Będziemy mieć teraz same prostokąty, które mają równoległe podstawy długości 1.
Poprzesuwajmy teraz te prostokąty równolegle do boków, tak aby ustawić jedne na drugich. Otrzymamy jeden prostokąt o podstawie równej 1 i wysokości $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot h_i$.

W analogiczny sposób postępujemy z figurą F_2, która jest sumą rozłącznych prostokątów $P_1', P_2', \ldots, P_n'$ o jednej parze boków równoległych do danej prostej k. Po przekształceniach otrzymamy również jeden prostokąt o podstawie równej 1 i wysokości $\sum_{i=1}^{n} a_i' \cdot h_i'$.

Wiemy, że pola figur F_1 i F_2 są równe zatem otrzymamy równość pól prostokątów P i P' z dokładnością do translacji. Wiemy, że podstawy tych prostokątów są równoległe do prostej k. Nasze figury F_1 i F_2 są więc równoważne translacyjnie przez rozkład. Kończy nam to dowód Twierdzenia 3.1.