

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki

Agnieszka Kosmala

**Obliczanie pól pewnych figur
metodą Pascala i Archimedesesa**

**Praca magisterska napisana w Zakładzie Geometrii
pod kierunkiem dr Jacka Świątkowskiego**

Wrocław 2000

Spis treści

Wstęp.....	3
1. Pole figury ograniczonej cykloidą.....	4
1.1 Cykloida.....	4
1.2 Zasada Cavalieriego.....	8
1.3 Pole figury ograniczone gałęzią cykloidy.....	9
1.3.1 Cykloida zwyczajna.....	9
1.3.2 Cykloida skrócona.....	15
1.3.3 Cykloida wydłużona.....	23
1.4 Obliczanie pól przy pomocy rachunku całkowego.....	30
2 Pole figury ograniczonej spiralą Archimedesesa i ewolwentą.....	32
2.1 Spirala Archimedesesa.....	32
2.2 Ewolwenta.....	33
2.3 Pole figury ograniczonej spiralą.....	34
2.4 Pole figury ograniczonej ewolwentą.....	39
2.5 Obliczenie pól przy użyciu rachunku całkowego.....	46
3 Literatura.....	48

Wstęp

Celem pracy jest pokazanie sposobu obliczenia pola figur płaskich ograniczonych pewnymi krzywymi: cykloidą, spiralą Archimedesesa i ewolwentą w sposób elementarny, nie korzystając z rachunku całkowego.

Już od najdawniejszych czasów uczeni poszukiwali skutecznych metod obliczania pól figur płaskich. W tym celu starali się oni swoje empiryczne obserwacje przenosić na aparat narzędzi matematycznych. Próbowali oni w różny sposób obliczyć pole figur między innymi dzielili je na nieskończenie wiele małych trójkątów lub porównywali ich pola z polami figur, których pole znali.

Pascal obliczył pole ograniczone cykloidą opierając się na porównywaniu pól pewnych figur. Jego rozwiązanie przedstawię dla cykloidy zwyczajnej a następnie wprowadzając analogiczną metodę obliczę pole figury ograniczonej cykloidą skróconą i wydłużoną.

Natomiast Archimedes obliczył pole figury ograniczonej krzywą zwaną spiralą Archimedesesa. Pole ograniczone spiralą Archimedesesa obliczył dzieląc je na nieskończenie wiele małych sektorów, które wpisywał lub opisywał na wycinkach koła. W analogiczny sposób obliczę pole figury ograniczonej ewolwentą.

Obliczenia postaram się przeprowadzić używając bardzo prostej i elementarnej wiedzy z matematyki i geometrii aczkolwiek dla cykloidy pokażę również rozwiązanie wykorzystujące równania parametryczne cykloidy, której pole mam obliczyć.

Otrzymane pola pod krzywymi porównam z polami jakie otrzymam używając rachunku całkowego.

Rozdział 1.

Pole figury ograniczonej cykloidą.

W rozdziale pierwszym przedstawię sposób w jaki Pascal obliczył pole figury ograniczonej cykloidą zwyczajną nie używając rachunku całkowego, a następnie wykorzystując analogiczny sposób obliczę pole figury ograniczonej cykloidą skróconą i wydłużoną.

W tym celu najpierw w paragrafie 1.1 przedstawię krzywą zwaną cykloidą, jej rodzaje oraz równanie parametryczne. W paragrafie 1.2 opiszę zasadę Cavalieriego. Sposób w jaki Pascal obliczył pole figury ograniczonej cykloidą zwyczajną przedstawię w paragrafie 1.3, natomiast moje obliczenia pola figury ograniczonej cykloidą skróconą w paragrafie 1.4 a cykloidą wydłużoną w paragrafie 1.5. W paragrafie 1.6 obliczę pola wspomnianych wyżej figur wykorzystując rachunek całkowy.

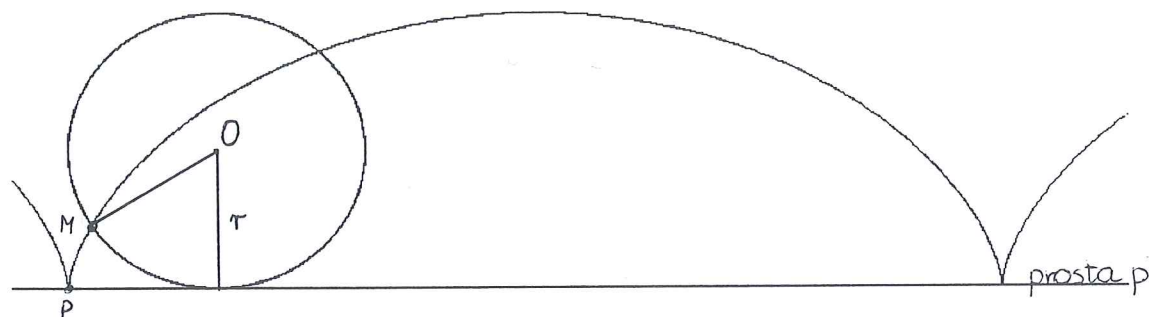
1.1 Cykloida

Definicja tej figury podana przez Galileusza wygląda następująco: cykloida jest to krzywa płaska zakreślona przez punkt M związany sztywno z kołem k , gdy toczy się ono bez poślizgu po prostej p . Koło k jest to koło o środku w punkcie O i promieniu r . Prosta p , po której toczy się koło k nazywamy kierownicą cykloidy. Figura zakreślona w czasie, gdy koło obróci się o kąt 2π (pełny obrót) nazywa się gałęzią cykloidy¹.

W zależności od położenia punktu M względem toczącego się koła k rozróżniamy cykloidy:

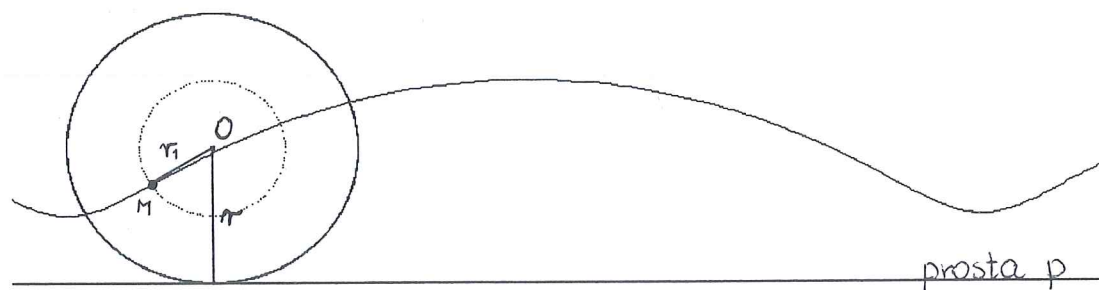
- cykloida zwyczajna (rys. 1) jest to linia jaką zakreśla punkt M leżący na brzegu toczącego się koła o promieniu r , czyli odległość r_1 punktu M od środka koła k jest równa promieniowi tego koła ($r = r_1$).

¹ W. Zawadowski, *Cykloida*, Skrypt, Warszawa 1994.



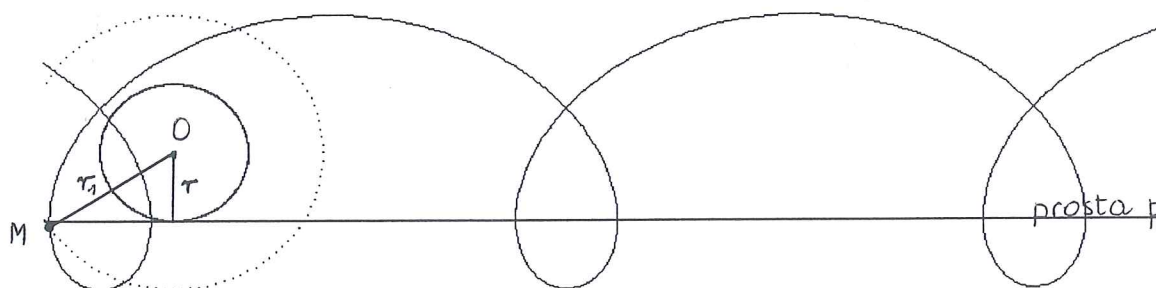
Rys. 1

- cykloida skrócona (rys. 2) jest to linia jaką zakresła punkt M leżący wewnątrz toczącego się koła o promieniu r , czyli odległość r_1 punktu M od środka koła jest mniejsza od promienia tego koła ($r > r_1$). Odległość r_1 od środka koła toczącego wyznacza nam mniejsze koło k_1 współśrodkowe z tymże kołem (na rys. 2 jest to koło narysowane przerywaną linią), na brzegu którego znajduje się punkt M .



Rys. 2

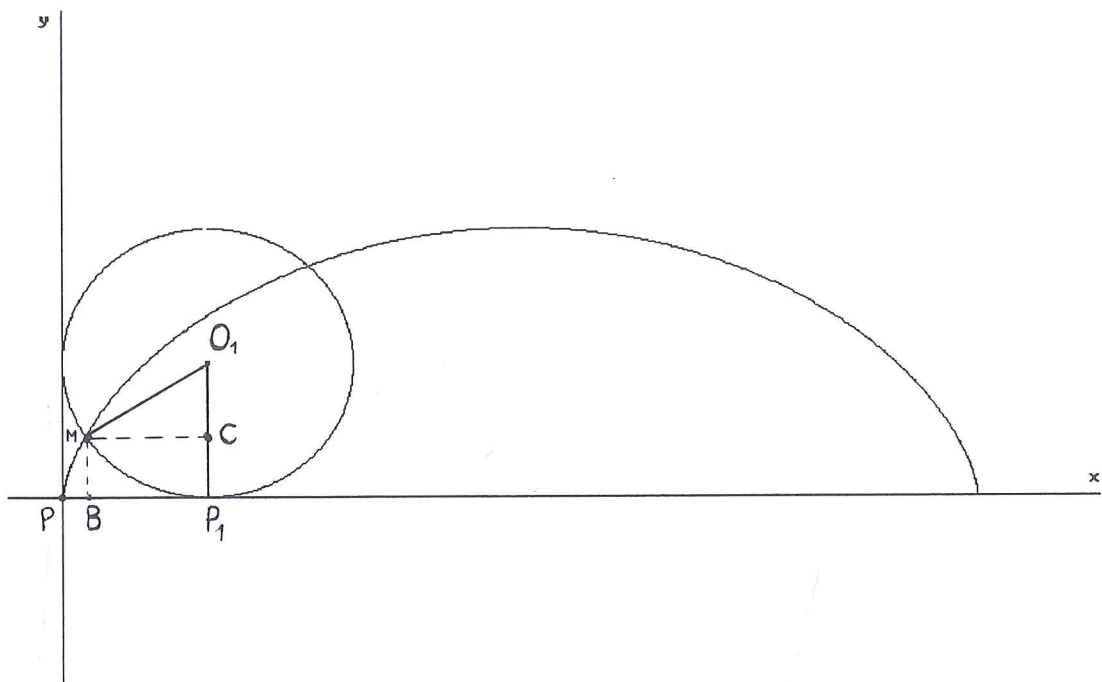
- cycloida wydłużona (rys. 3) jest to linia jaką zakreśla punkt M leżący na zewnątrz toczącego się koła o promieniu r , czyli odległość r_1 punktu M od środka koła k jest większa od promienia tego koła ($r < r_1$). Odległość r_1 od środka koła toczącego wyznacza nam większe koło k_1 współśrodkowe z tymże kołem (na rys.1.3 jest to koło narysowane przerywaną linią) na brzegu którego znajduje się punkt M.



Rys. 3

Wyprowadzę teraz równanie cycloidy zwyczajnej. Niech koło k o środku w punkcie O i promieniu r z wyróżnionym punktem M na jego brzegu toczy się bez poślizgu po linii prostej p (rys 4). Punkt M zakreśla krzywą zwaną cycloidą, której równanie znajdę. W tym celu cycloidę umieszczam w układzie współrzędnych tak, aby linia prosta p (kierownica cycloidy) pokrywała się z osią OX oraz początkowe położenie koła, które się po niej toczy miało równanie $x^2 + (y-r)^2 \leq r$, a obserwowany punkt M leżał pierwotnie w początku układu współrzędnych .

Po pewnej chwili w wyniku toczenia się koła wyróżniony punkt cycloidy z początkowego położenia P przeszedł w położenie M_1 , kreśląc łuk PM_1 , zaś promień PO odchylił się od wyjściowego pionowego położenia o kąt t równy kątowi $P_1O_1M_1$ (miarę kąta rozpatrujemy w radianach) do położenia O_1P_1 .



Rys. 4

Ponieważ koło toczy się bez poślizgu mamy równość $|PP_1| = |P_1M_1|$, gdzie $|P_1M_1| = rt$. Stąd współrzędne x, y dowolnego punktu M_1 cykloidy spełniają związki:

$$\begin{aligned} x &= |PB| = |PP_1| - |BP_1| = rt - r \sin t \\ y &= |M_1B| = |O_1P_1| - |CO_1| = r - r \cos t \end{aligned} \quad (1.1)$$

Tak więc współrzędne kartezjańskie dowolnego punktu cykloidy dają się wyrazić w zależności od stałego promienia $r > 0$ koła toczącego się oraz zmiennego kąta $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ zwanego parametrem².

Wzory (1.1) można uogólnić do wzorów opisujących cykloidę skróconą i wydłużoną:

$$\begin{aligned} x &= rt - r_1 \sin t \\ y &= r - r_1 \cos t \end{aligned} \quad (1.2)$$

gdzie r jest promieniem koła toczącego się, a r_1 jest odległością punktu M od środka koła toczącego się.

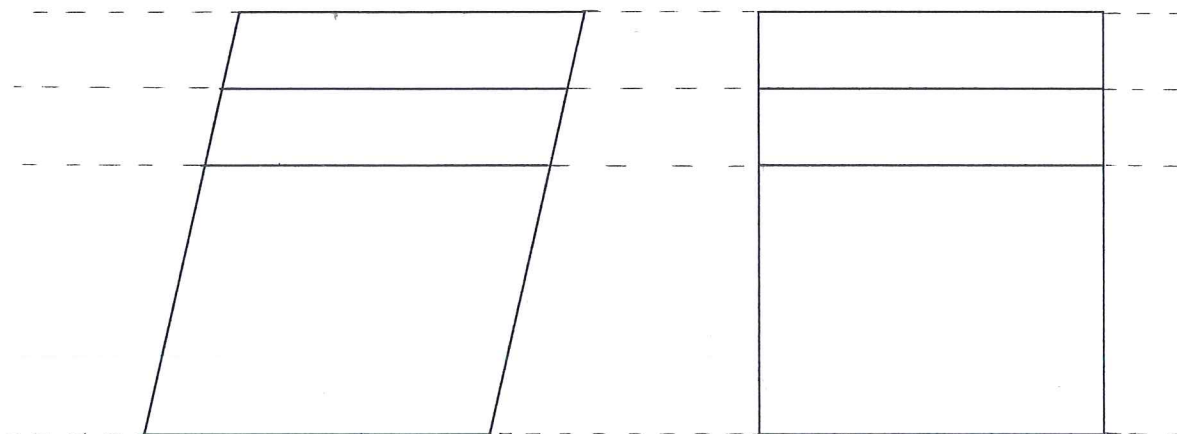
² W. Krywicki, H. Pisarewska, T. Świątkowski, *Z geometrią za pan brat*, Warszawa 1992, s. 151.

1.2 Zasada Cavalieriego

Zasada ta opiera się na założeniu, że figurę płaską można podzielić na nieskończoną ilość równoległych odcinków (można też podzielić na nieskończenie wiele małych prostokątów- widać tu podobieństwo do całkowania), tak że pokryją idealnie całą figurę.

Zasada ta mówi nam, że gdy dwie figury płaskie, które mają tę samą wysokość i na każdej wysokości (poziomie) długości poziomych odcinków zawartych w tych figurach (czyli przekrojów tych figur poziomymi prostymi poprowadzonymi na tej wysokości) są równe to figury te mają równe pola (rys. 5).

Zasada Cavalieriego nie określa pola liczbowo, lecz jedynie porównuje dwie figury co do powierzchni pola. Stosowanie zasady jest jednak ograniczone: od figury, której pole powierzchni uważamy za znane, przechodzimy do następnej, a od tej znowu dalej, co wymaga przy uzyskiwaniu wyników dużej inwencji.

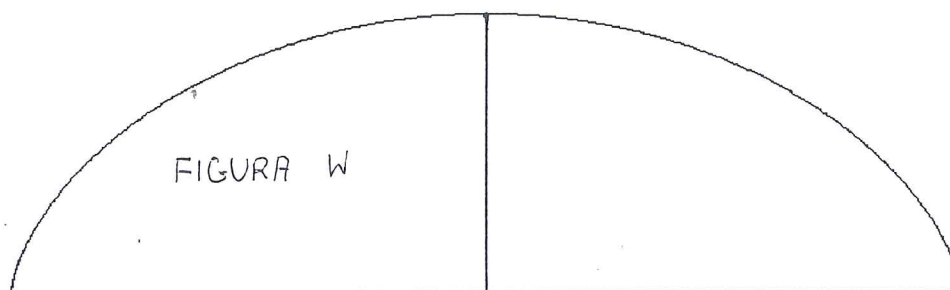


Rys. 5

1.3 Pole figury ograniczonej gałęzią cycloidy.

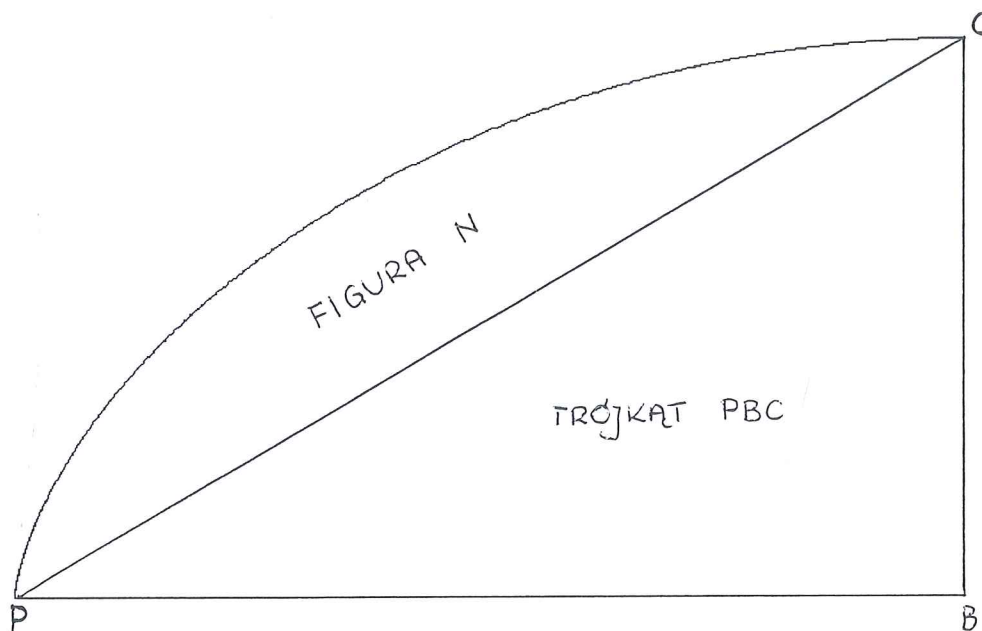
1.3.1 Cycloida zwyczajna

Pascal obliczył pole figury ograniczonej gałęzią cycloidy zwyczajnej i jej kierownicą wykorzystując wspomnianą wcześniej zasadę Cavalieriego. Najpierw jednak zauważmy, że pole to możemy rozpatrywać tylko dla jednej połówki gałęzi, ponieważ obie połówki gałęzi cycloidy są wzajemnie przystające, a następnie pomnożyć przez dwa. Figurę ograniczoną połową gałęzi cycloidy i jej kierownicą nazwijmy figurą W (rys.6).



Rys. 6

Figura W składa się z trójkąta PBC oraz figury N, gdzie figura N jest to figura, która powstała poprzez odcięcie od figury W trójkąta PBC (rys. 7).



Rys. 7

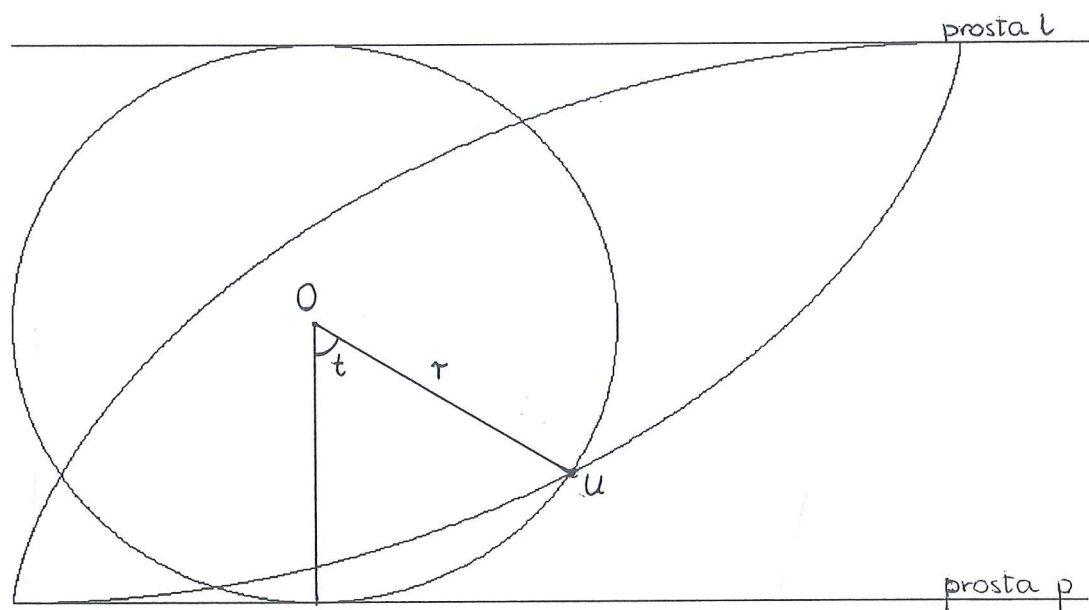
Pole figury W jest sumą pól: trójkąta PBC oraz pola figury N

$$P_W = P_{\Delta PBC} + P_N \quad (1.3)$$

Pole trójkąta PBC obliczymy w prosty sposób, ponieważ potrafimy wyznaczyć długości jego boków. Bok $|PB|$ jest równy πr i jest to długość połowy obwodu koła, a bok $|BC|$ wynosi $2r$ i jest to wysokość koła o promieniu r , czyli długość średnicy koła k . Zatem pole trójkąta wynosi:

$$P_{\Delta PBC} = \frac{1}{2} |PB| \cdot |BC| = \frac{1}{2} \pi r \cdot 2r = \pi r^2 \quad (1.4)$$

Natomiast aby obliczyć pole figury N zastosujemy pewien trik. Otóż narysujemy na tym samym wykresie co cycloida krzywą g , którą zakreśli punkt U , znajdujący się na brzegu koła k (jest to koło wyznaczające cycloidę), lecz toczącym się po prostej l równoległej do kierownicy cycloidy poprowadzonej w odległości $2r$, z tej strony po której znajduje się toczący okrąg. Położenie początkowe (punkt P) i końcowe (punkt C) koła k i punktu U jest takie samo jak położenie koła k i punktu M wyznaczającego cycloidę zwyczajną (rys.8).

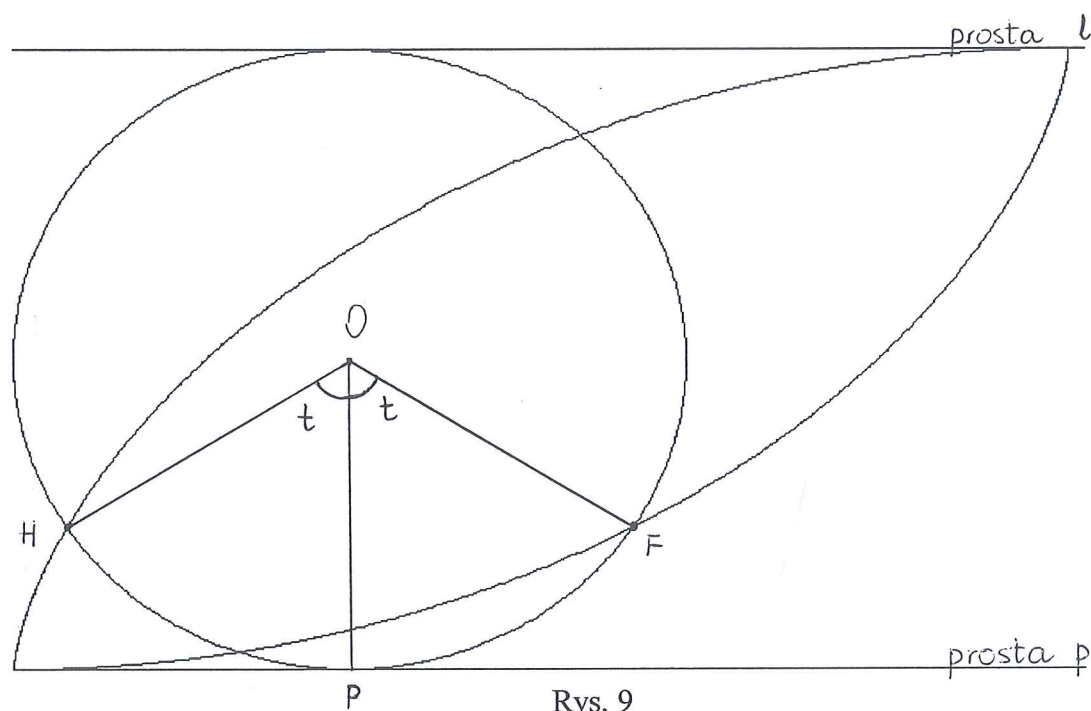


Rys. 8

Zauważmy, że otrzymaliśmy figurę w kształcie wrzeciona, nazwijmy ją figurą $2N$, którą odcinek PC dzieli na dwie przystające figury o równych polach. Równość pól wynika z faktu, że krzywa g i połowa gałęzi cykloidy zwyczajnej są punktowo symetryczne względem punktu T , który jest punktem przecięcia odcinka PC i prostej, którą wyznacza ruch środka koła (rys.8).

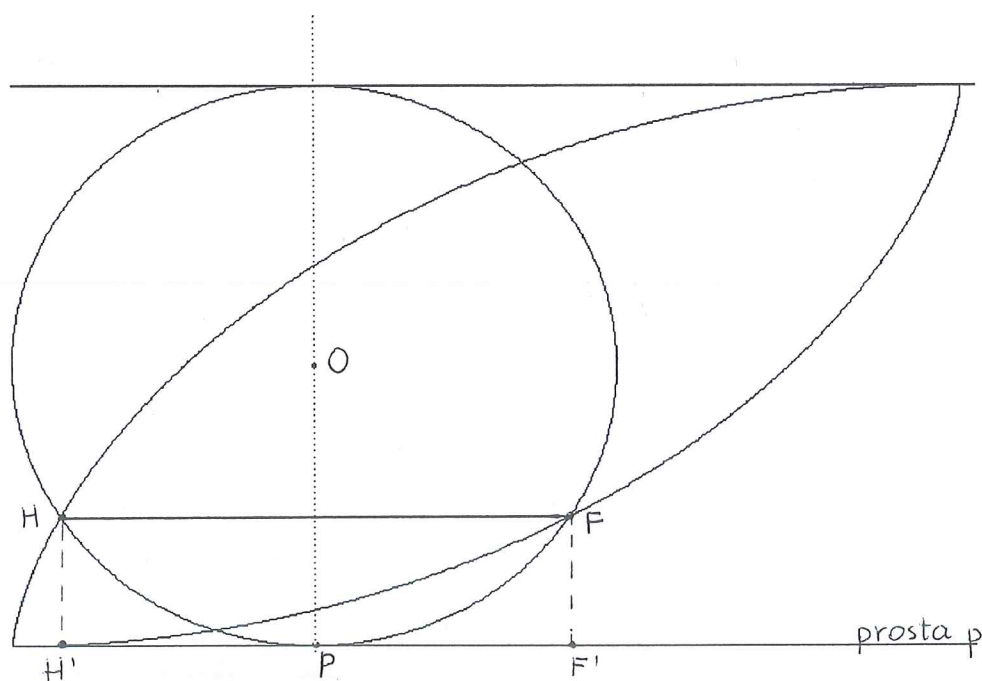
Jeżeli znajdziemy pole figury $2N$ to pole figury N będzie równe połowie jej pola. Pole figury $2N$ obliczymy wykorzystując wspomnianą zasadę Cavalieriego. Pokażemy, że pole figury $2N$ jest równe polu koła k na brzegu którego znajduje się punkt M (tzn.: koła, które wyznacza cykloidę).

Figura $2N$ ma wysokość równą wysokości cykloidy czyli równą $2r$, czyli równą średnicy koła k . Pokażę, że dla tego samego parametru t odcinki zwarte w kole k i figurze $2W$ są poziome równej długości. W tym celu obieramy punkt H na gałęzi cykloidy na wysokości h . Narysujmy odpowiednio przetoczony okrąg wyznaczający ten punkt. Oznaczmy przez t kąt o jaki obrócił się ten okrąg. Okrąg ten przecina krzywą g w punkcie F . Zauważmy, że okrąg ten można potraktować tak jakby przetoczył się o kąt t po prostej l , i że punkt F jest punktem wyznaczonym przez tak przetoczony okrąg. Położenie punktów przedstawia rysunek 9.



Rys. 9

Zauważmy, że punkt F jest punktem symetrycznym do punktu H względem prostej zawierającej odcinek OP. Ponieważ symetria osiowa zachowuje odległości punktów to $HH' = FF'$, czyli punkt F leży na tej samej wysokości co punkt H (rys.10).



Rys. 10

Zatem poziomym odcinkiem na poziomie h jest odcinek HF . Z rysunku 9 wynika, że odcinek HF ma taką samą długość co cięciwa koła k poprowadzona poziomo na wysokości h .

Wobec powyższego otrzymujemy, że na równych poziomach h (dla tego samego t) odcinki zawarte w figurze $2N$ i kole k są poziome i mają taką samą długość. Na mocy zasady Cavalieriego pole figury $2N$ i pole koła są równe czyli pole figury $2N$ wynosi πr^2 (pole koła o promieniu r wynosi πr^2).

Dla naszych obliczeń potrzebne jest pole figury N , a jest ono równe połowie pola figury $2N$:

$$P_N = \frac{1}{2} P_{2N} = \frac{\pi r^2}{2} \quad (1.5)$$

natomiast pole figury W wynosi :

$$P_W = P_{\Delta ABC} + P_N = \pi r^2 + \frac{\pi r^2}{2} = \frac{3\pi r^2}{2} \quad (1.6)$$

Pole figury ograniczonej gałęzią cycloidy wynosi :

$$P = 2P_W = 2 \frac{3\pi r^2}{2} = 3\pi r^2 \quad (1.7)$$

Teraz przedstawię drugi sposób obliczenia pola figury ograniczonej gałęzią cycloidy zwyczajnej, w którym wykorzystam równania parametryczne cycloidy. Początek rozważań jest taki sam, tzn.: rozpatruję tylko jedną połowę gałęzi cycloidy, a następnie dzielę ją na dwie figury czyli na trójkąt PBC i figurę W . Stosuję również ten sam sposób z rysowaniem krzywej g , gdzie otrzymuję wrzeciono (figurę $2N$) o polu równym podwojonemu polu figury N . Pole figury $2N$ obliczę w ten sam sposób co w poprzednim rozważaniu, czyli na mocy zasady Cavalieriego porównam pola figury $2N$ i koła k wyznaczającego cycloidę zwyczajną. Różnica polega na sposobie pokazania równości długości odcinków na tym samym poziomie h . Poziom h wyznacza wartość y w równaniach parametrycznych tych krzywych. Przedstawmy najpierw równania krzywych: -cycloidę zwyczajną opisuje funkcja zadana parametrycznie:

$$\begin{aligned} x &= tr - r \sin t \\ y &= r - r \cos t \end{aligned} \quad (1.8)$$

-krzywa g , którą wykreślił punkt U na kole toczącym się po prostej l jest opisana parametrycznie:

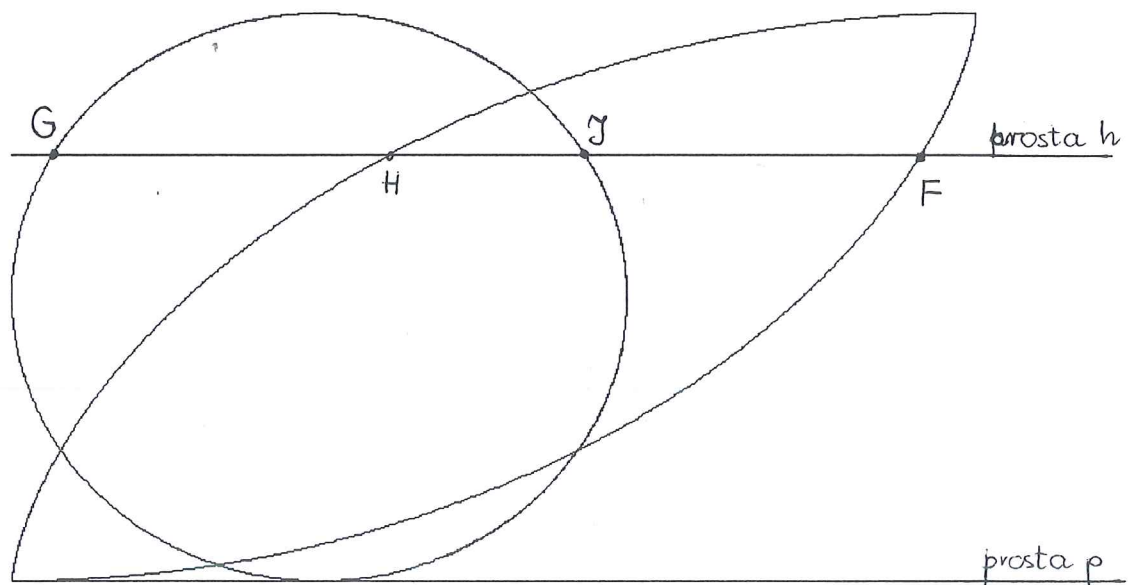
$$\begin{aligned}x &= rt + r \sin t \\y &= r - r \cos t\end{aligned}\tag{1.9}$$

-okrąg k jest opisany:

$$\begin{aligned}x &= r \sin t \\y &= r - r \cos t\end{aligned}\tag{1.10}$$

Z równań (1.8), (1.9) i (1.10) zwraca uwagę zbieżność współrzędnej y . Stąd wynika, że każdej wysokości h w trzech równaniach odpowiada pewne (jedno i to samo w trzech równaniach) t . Zatem możemy długość odpowiednich odcinków poziomego przekroju na poziomie (wysokości) h obliczyć porównując współrzędne x dla tego t .

Oznaczmy punkty: H jest to punkt przecięcia prostej h i gałęzi cycloidy zwyczajnej, F to punkt przecięcia prostej h i krzywej g oraz punkty G i J są to punkty przecięcia prostej h i koła k , gdzie prosta h jest to prosta pozioma odległa od prostej l o $h = r - r \cos t$ (rys. 11).



Rys. 11

Na mocy powyższego otrzymujemy, że każdym poziomie h zadany parametrycznie względem t długość odcinka HF (z różnicy ich współrzędnych x) wynosi:

$$|HF| = rt + r \sin t - (rt - r \sin t) = rt + r \sin t - rt + r \sin t = 2r \sin t \quad (1.11)$$

Natomiast długość odcinka GJ na tym samym poziomie h to:

$$|GJ| = r \sin t + r \sin t = 2r \sin t \quad (1.12)$$

A zatem na równych poziomach (dla tego samego t) mamy taką samą długość odcinków HF i GJ.

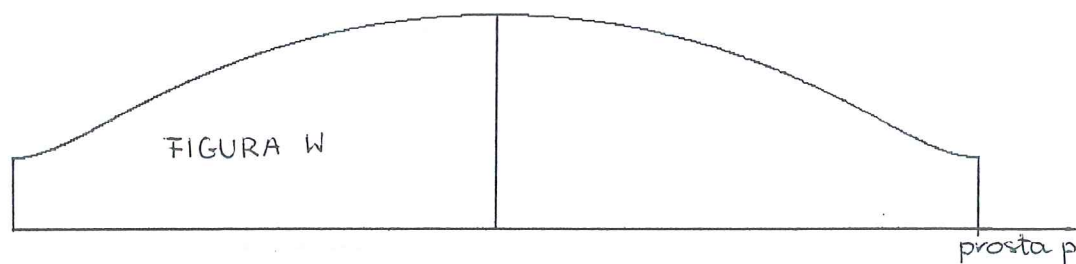
Na mocy zasady Cavalieriego pole figury 2N i pole koła k są równe czyli pole figury 2N wynosi πr^2 .

W dalszych obliczeniach otrzymujemy analogiczne wyniki.

Podsumowując otrzymaliśmy, że pole pod gałęzią cykloidy wynosi $3\pi r^2$ równanie (1.7), czyli jest ono równe sumie trzech pól koła toczącego się.

1.3.2 Cykloida skrócona

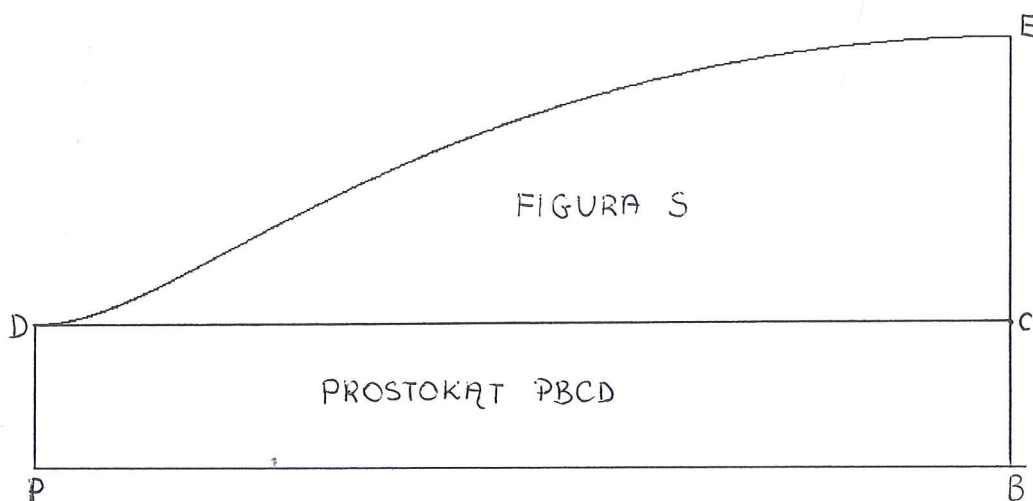
Sugerując się metodą Pascala w obliczeniu pola figury ograniczonej cykloidą zwyczajną obliczę pole figury ograniczonej cykloidą skróconą i jej kierownicą (czyli prostą p). Tutaj również przedstawimy dwa sposoby porównania długości odpowiednich



odcinków: elementarny i analityczny.

Pole to możemy rozpatrywać tylko dla jednej połówki gałęzi ponieważ obie połówki gałęzi cycloidy skróconej są wzajemnie przystające, a następnie pomnożyć przez dwa. Figurą ograniczoną połową gałęzi cycloidy skróconej i jej kierownicą (prostą p) nazwijmy figurą W (rys. 12).

Pole figury W możemy rozpatrywać jako sumę pól: prostokąta $PBCD$ oraz pole figury S , gdzie figura S powstała poprzez odcięcie od figury W prostokąta $PBCD$ (rys. 13).

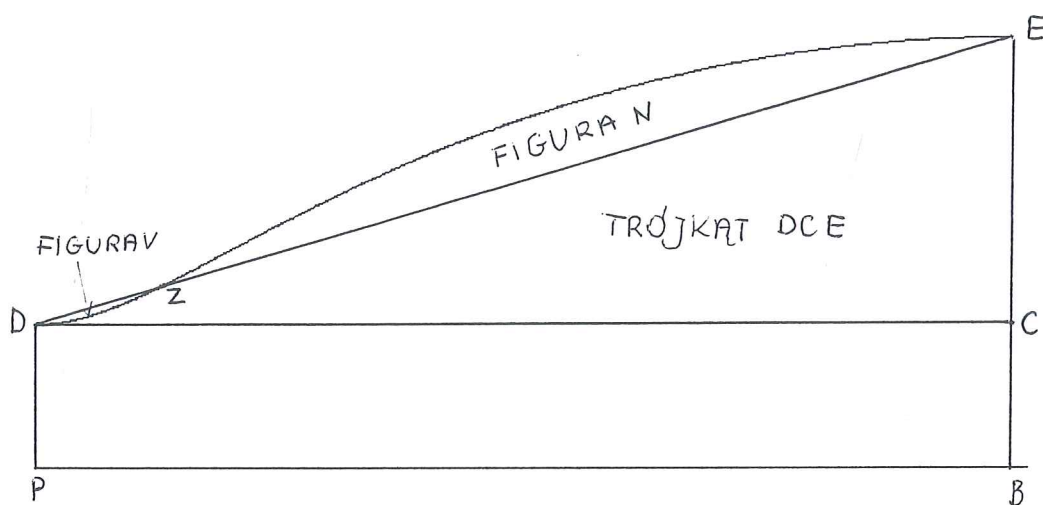


Rys. 13

Pole prostokąta $PBCD$ obliczymy wykorzystując znajomość długości boków. Bok $|PB|$ wynosi πr i jest równy połowie długości obwodu koła k tocącego się, natomiast długość boku $|BC|$ równa się $(r-r_1)$ i jest to różnica długości promienia koła tocącego się i odległości punktu M (wyznaczającego cycloidę skróconą) od środka O koła k wewnątrz, którego znajduje się M . Zatem pole prostokąta wynosi:

$$P_{PBCD} = |PB||BC| = \pi r(r - r_1) = \pi r^2 - \pi r r_1 \quad (1.13)$$

Figura S jest to figura składająca się z figury X (jest to figura powstała poprzez odcięcie od trójkąta DCE figury V) oraz figury N (jest to figura , która powstała poprzez odcięcie od figury S trójkąta DCE). Figura V jest to figura zawarta pomiędzy odcinkiem DZ a odcinkiem gałęzi cykloidy skróconej zawartym pomiędzy punktami D i Z (rys. 14).



Rys. 14

Pole figury S rozpatrzmy jako różnicę sumy pól: trójkąta DCE i figury N oraz pola figury V.

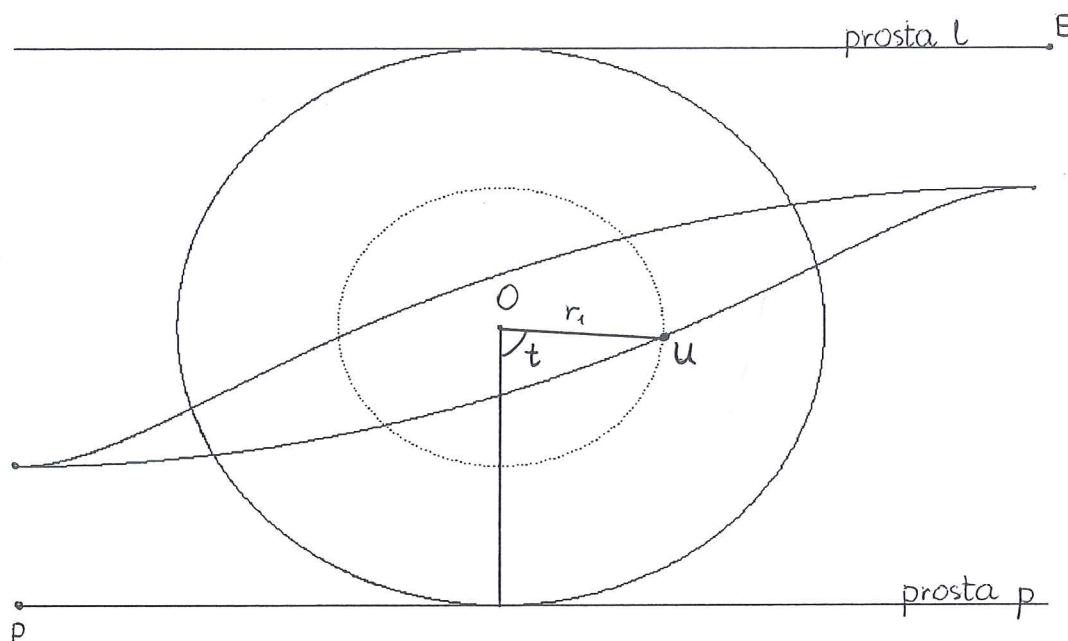
$$P_S = P_{\Delta DCE} + P_N - P_V \quad (1.14)$$

Pole trójkąta DCE obliczymy w prosty sposób, ponieważ potrafimy wyznaczyć długości jego boków. Bok $|DC|$ jest równy πr i jest to długość połowy obwodu koła k , a bok $|CE|$ wynosi $2r_1$ i jest to podwojona odległość punktu M od środka koła k . Zatem pole trójkąta wynosi:

$$P_{\Delta DCE} = \frac{1}{2} |DC| \cdot |CE| = \frac{1}{2} \pi r \cdot 2r_1 = \pi r r_1 \quad (1.15)$$

Natomiast aby obliczyć różnicę pól figur N i V zastosujemy pewien trik. Otóż narysujemy na tym samym rysunku co cykloida skrócona, krzywą g którą zakresli punkt U, znajdujący się wewnątrz koła k w odległości r_1 od jego środka O, lecz toczącym się po prostej l równoległej do kierownicy cykloidy poprowadzonej w odległości $2r$, z tej strony

po której znajduje się toczący okrąg. Położenie początkowe (punkt P) i końcowe (punkt E) koła k i punktu U jest takie samo jak położenie koła k i punktu M wyznaczającego cykloidę skróconą (rys. 15).



Rys. 15

Zauważmy, że otrzymaliśmy figurę w kształcie wrzeciona, nazwijmy ją figurą Z (rys. 16).

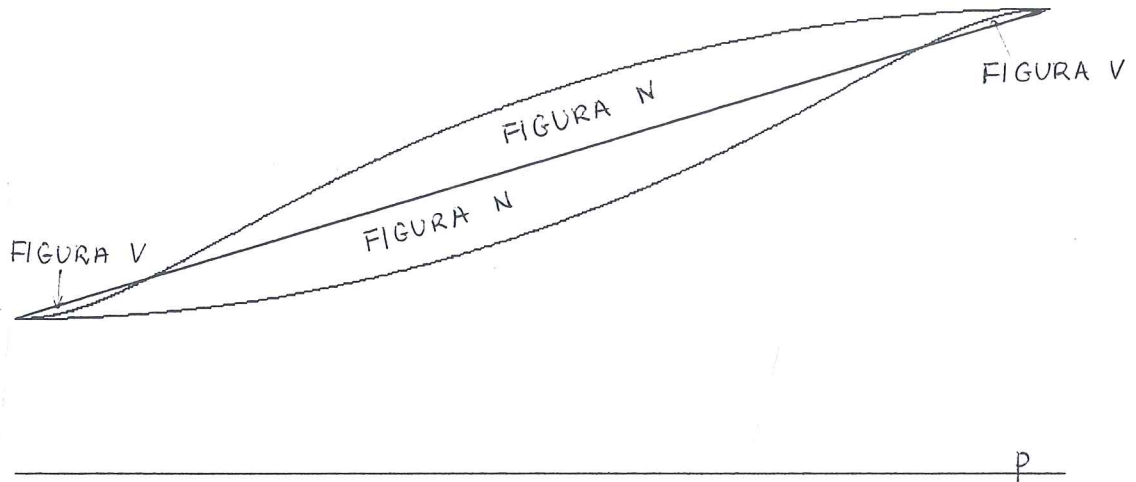
Figura Z jest równa różnicy dwóch figur N i dwóch figur V.

$$Z = 2N - 2V \quad (1.16)$$

gdzie N i V są jak na rysunku 16.

Z (1.16) otrzymujemy:

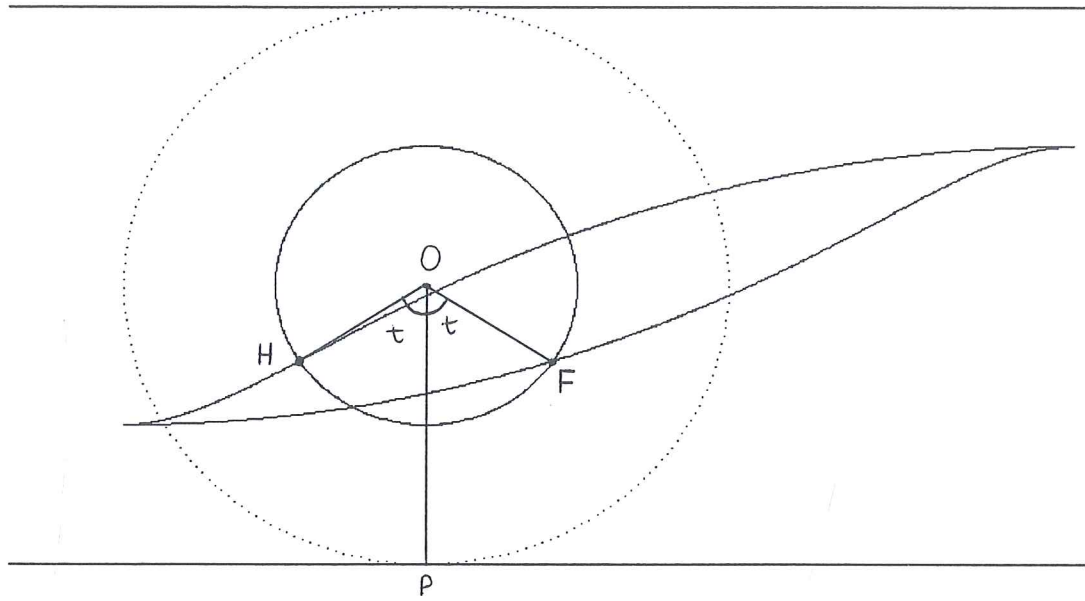
$$P_N - P_V = \frac{P_Z}{2} \quad (1.17)$$



Rys. 16

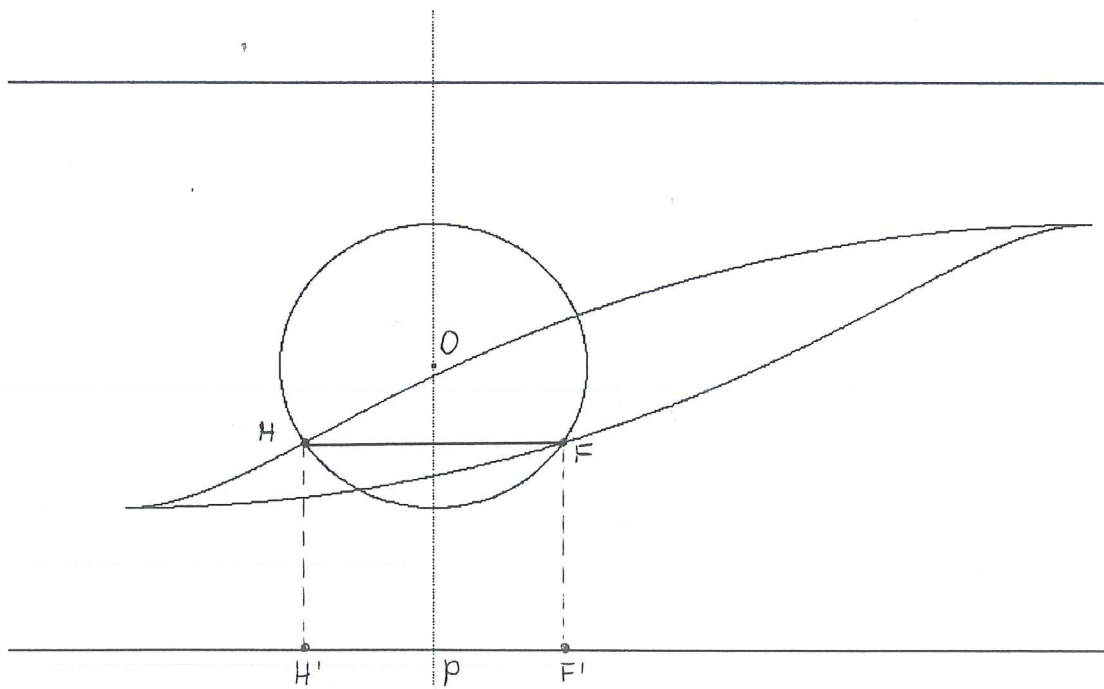
Jeżeli znajdziemy pole figury Z to różnica pól figur N i V będzie równe połowie jej pola. Pole figury Z obliczymy wykorzystując wspomnianą zasadę Cavalieriego. Pokażemy, że pole figury Z jest równe polu koła k_1 (jest to koło współśrodkowe z kołem k , i jego promień jest równy odległości punktu wyznaczającego cykloidę skróconą M od środka koła toczącego się).

Wysokość figury Z jest równa wysokości cykloidy skróconej i wynosi $2r_1$, czyli jest równa średnicy koła k_1 . Pokażę, że dla tego samego parametru t odcinki zwarte w kole k_1 i figurze Z są poziome i równej długości. W tym celu obieramy punkt H na gałęzi cykloidy na wysokości h . Narysujmy odpowiednio przetoczony okrąg wyznaczający ten punkt. Oznaczmy przez t kąt o jaki obrócił się ten okrąg. Okrąg ten przecina krzywą g w punkcie F . Zauważmy, że okrąg ten można potraktować tak jakby przetoczył się o kąt t po prostej l , i że punkt F jest punktem wyznaczonym przez tak przetoczony okrąg. Położenie punktów przedstawia rysunek 17.



Rys. 17

Zauważmy, że punkt F jest punktem symetrycznym do punktu H względem prostej zawierającej odcinek OP. Ponieważ symetria osiowa zachowuje odległości punktów to $HH' = FF'$, czyli punkt F leży na tej samej wysokości co punkt H (rys.18).



Rys.18

Zatem poziomym odcinkiem na poziomie h jest odcinek HF . Z rysunku 17 wynika, że odcinek HF na taką samą długość co cięciwa koła k_1 poprowadzona poziomo na wysokości h .

Wobec powyższego otrzymujemy, że na równych poziomach h (dla tego samego t) odcinki zawarte w figurze Z i kole k_1 są poziome i mają taką samą długość. Na mocy zasady Cavalieriego pole figury Z i pole koła k_1 są równe czyli pole figury Z wynosi πr_1^2 .

Dla naszych obliczeń potrzebna jest różnica pól figur N i V , a jest ona równa połowie pola figury Z (1.17), czyli

$$P_N - P_V = \frac{P_Z}{2} = \frac{\pi r_1^2}{2} \quad (1.18)$$

natomiast pole figury S wynosi :

$$P_S = P_{\Delta DCE} + P_N - P_V = \pi r r_1 + \frac{\pi r_1^2}{2} \quad (1.19)$$

Ostatecznie pole figury W to

$$P_W = P_{PBCD} + P_S = \pi r^2 - \pi r r_1 + \pi r r_1 + \frac{\pi r_1^2}{2} = \pi r^2 + \frac{\pi r_1^2}{2} \quad (1.20)$$

Pole figury ograniczonej gałęzią cycloidy skróconej wynosi :

$$P = 2P_W = 2\left(\pi r^2 + \frac{\pi r_1^2}{2}\right) = 2\pi r^2 + \pi r_1^2 \quad (1.21)$$

Teraz przedstawię drugi sposób w którym wykorzystam równania parametryczne cycloidy skróconej. Początek rozważań jest taki sam, tzn.: rozpatruję tylko jedną połowę gałęzi cycloidy skróconej, a następnie dzielę ją na dwie figury: trójkąt PBC i figurę S . Stosuję również ten sam sposób z rysowaniem krzywej g , gdzie otrzymuję wrzeciono (figurę Z) o polu równym podwojonej różnicy pól figur N i V . Pole figury Z obliczę w ten sam sposób co w poprzednim rozważaniu, czyli na mocy zasady Cavalieriego porównam pola figury Z i koła k_1 . Różnica polega na sposobie pokazania równości długości odcinków na tym samym poziomie h . Poziom h wyznacza nam wartość y w równaniach parametrycznych tych krzywych. Przedstawmy najpierw te równania: -cycloidę zwyczajną opisuje funkcja zadana parametrycznie ($r < r_1$):

$$\begin{aligned} x &= tr - r_1 \sin t \\ y &= r - r_1 \cos t \end{aligned} \quad (1.22)$$

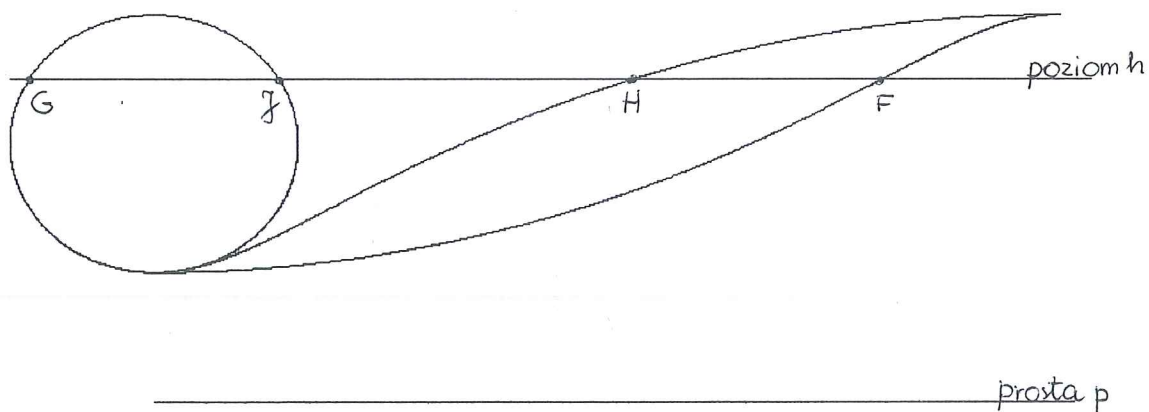
-krzywa g , którą wykreślił punkt U na kole toczącym się po prostej l jest opisana parametrycznie:

$$\begin{aligned}x &= rt + r_1 \sin t \\y &= r - r_1 \cos t\end{aligned}\tag{1.23}$$

-okrąg koła k_1 jest opisany:

$$\begin{aligned}x &= r_1 \sin t \\y &= r - r_1 \cos t\end{aligned}\tag{1.24}$$

Z równań (1.22), (1.23) i (1.24) zwraca uwagę zbieżność współrzędnej y . Stąd wynika, że każdej wysokości h w trzech równaniach odpowiada pewne (jedno i to samo w trzech równaniach) t . Zatem możemy długość odpowiednich odcinków poziomego przekroju na poziomie (wysokości) h obliczyć porównując współrzędne x dla tego t . Oznaczmy punkty : H jest to punkt przecięcia prostej h i gałęzi cycloidy zwyczajnej, F to punkt przecięcia prostej h i krzywej g oraz punkty G i J są to punkty przecięcia prostej h i koła k , gdzie prosta h jest to prosta pozioma odległa od prostej l o $h = r - r_1 \cos t$ (rys. 19).



Rys. 19

Na mocy powyższego otrzymujemy, że każdym poziomie h zadany parametrycznie względem t długość odcinka HF (z różnicy ich współrzędnych x) wynosi:

$$|HF| = rt + r_1 \sin t - (rt - r_1 \sin t) = rt + r_1 \sin t - rt + r_1 \sin t = 2r_1 \sin t \quad (1.25)$$

Natomiast długość odcinka GJ na tym samym poziomie h to:

$$|GJ| = r_1 \sin t + r_1 \sin t = 2r_1 \sin t \quad (1.26)$$

A zatem na równych poziomach (dla tego samego t) mamy taką samą długość odcinków HF i GJ.

Na mocy zasady Cavalieriego pole figury Z i pole koła k_1 są równe czyli pole figury Z wynosi πr_1^2 .

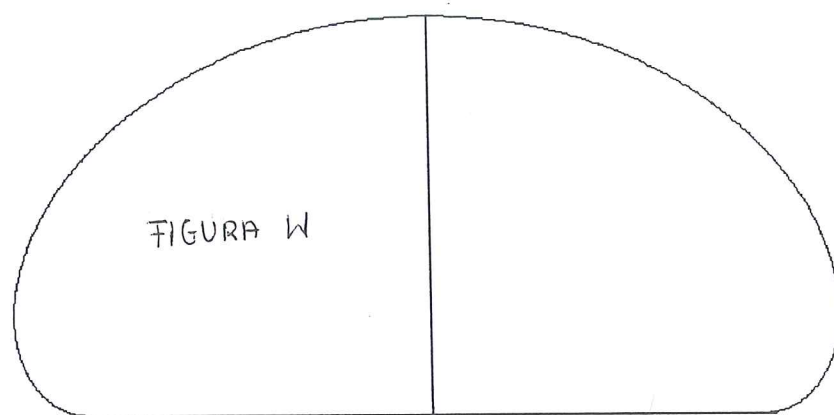
W dalszych obliczeniach otrzymujemy analogiczne wyniki.

Podsumowując otrzymaliśmy, że pole pod gałęzią cykloidy skróconej wynosi $2\pi r^2 + \pi r_1^2$. Pole to jest równe sumie dwóch pól koła toczącego się i jednego pola koła, którego promień jest równy odległości punktu M (jest to punkt, który wyznacza cykloidę skróconą) od środka koła toczącego się (koła k).

1.3.2 Cykloida wydłużona

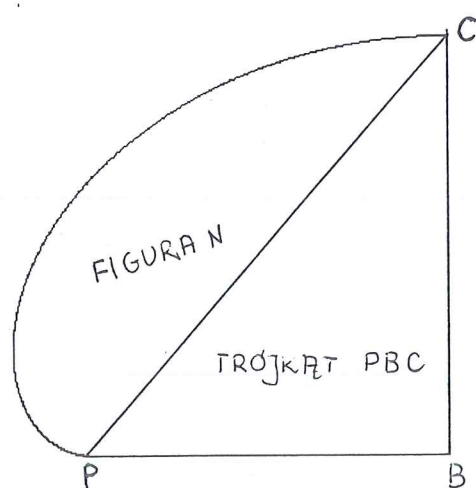
Sugerując się metodą Pascala w obliczeniu pola figury ograniczonej cykloidą zwyczajną obliczę pole figury ograniczonej cykloidą wydłużoną i prostą p. Prosta p jest to prosta równoległa do kierownicy cykloidy wydłużonej leżącej w odległości równej różnicy promienia koła toczącego się (koło k) i odległości punktu M od środka koła k. Figurę tę nazwijmy figura W. Tutaj również przedstawimy dwa sposoby porównania długości odpowiednich odcinków: elementarny i analityczny.

Pole to możemy rozpatrywać tylko dla jednej połówki gałęzi ponieważ obie połówki gałęzi cykloidy wydłużonej są wzajemnie przystające, a następnie pomnożyć przez dwa (rys. 20).



Rys. 20

Pole figury W jest sumą: trójkąta PBC oraz figury N, gdzie figura N jest to figura, która powstała poprzez odcięcie od figury W trójkąta PBC (rys. 21).



Rys. 21

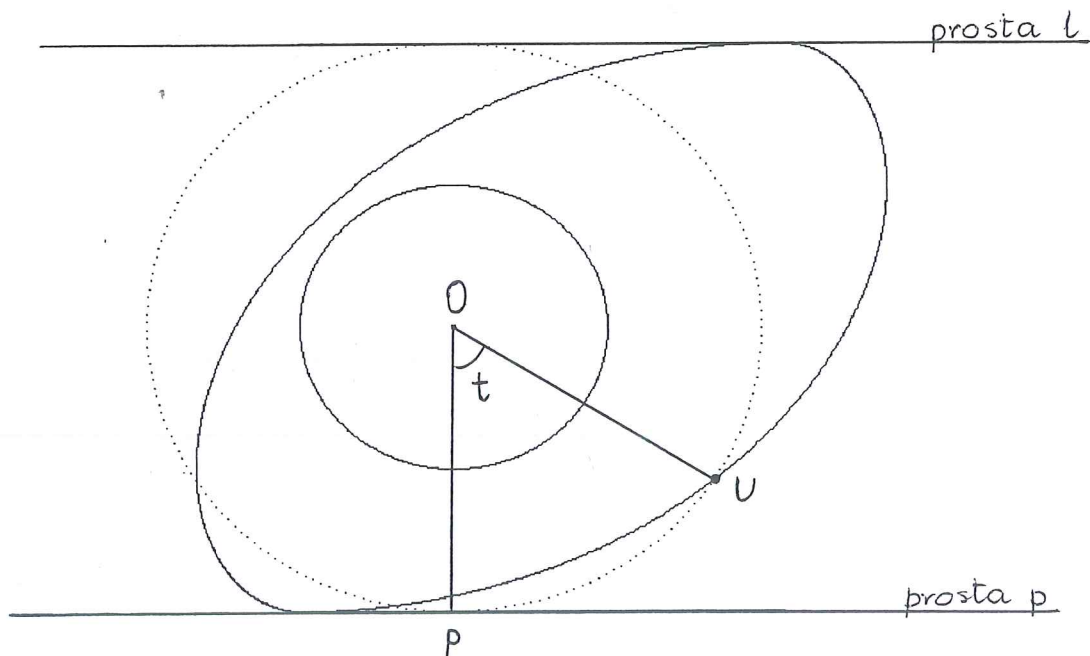
Pole figury W jest zatem równe:

$$P_W = P_{\Delta PBC} + P_N \quad (1.27)$$

Pole trójkąta PBC obliczymy w prosty sposób, ponieważ potrafimy wyznaczyć długości jego boków. Bok $|PB|$ jest równy πr i jest to długość połowy obwodu koła, a długość boku $|BC|$ wynosi $2r_1$ i jest to wysokość koła k_1 (jest to koło o promieniu r_1 współśrodkowe z kołem k tocącym się). Zatem pole trójkąta wynosi:

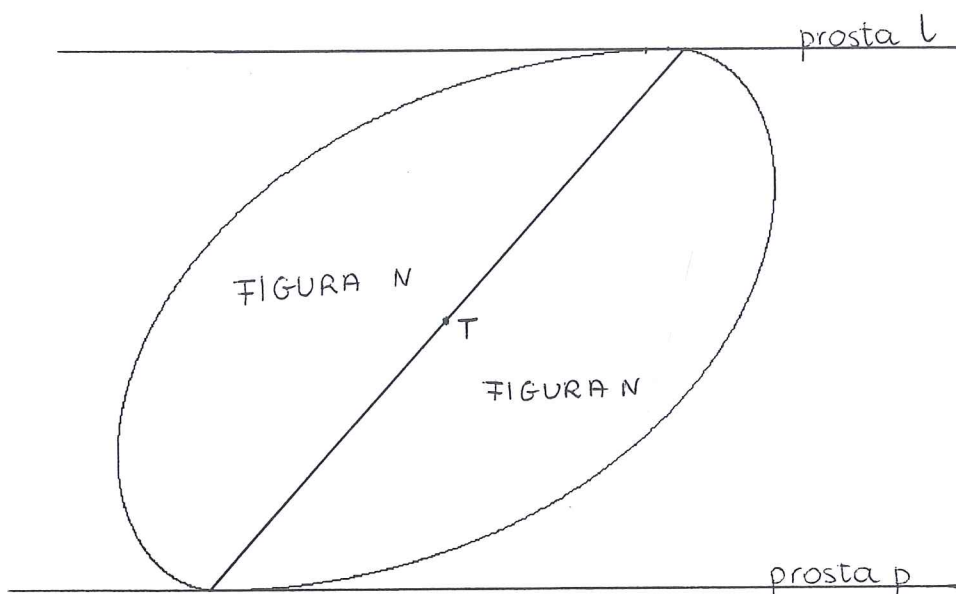
$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |PB| \cdot |BC| = \frac{1}{2} \pi r \cdot 2r_1 = \pi r r_1 \quad (1.28)$$

Natomiast aby obliczyć pole figury N narysujemy na tym samym wykresie co cycloida wydłużona, krzywą g którą zakresli punkt U , znajdujący się na zewnątrz koła k w odległości r_1 od jego środka O , lecz tocącym się po prostej l równoległej do kierownicy cycloidy poprowadzonej w odległości $2r$, z tej strony po której znajduje się toczący okrąg. Położenie początkowe (punkt P) i końcowe (punkt C) koła k i punktu U jest takie samo jak położenie koła k i punktu M wyznaczającego cycloidę wydłużoną (rys.22).



Rys. 22

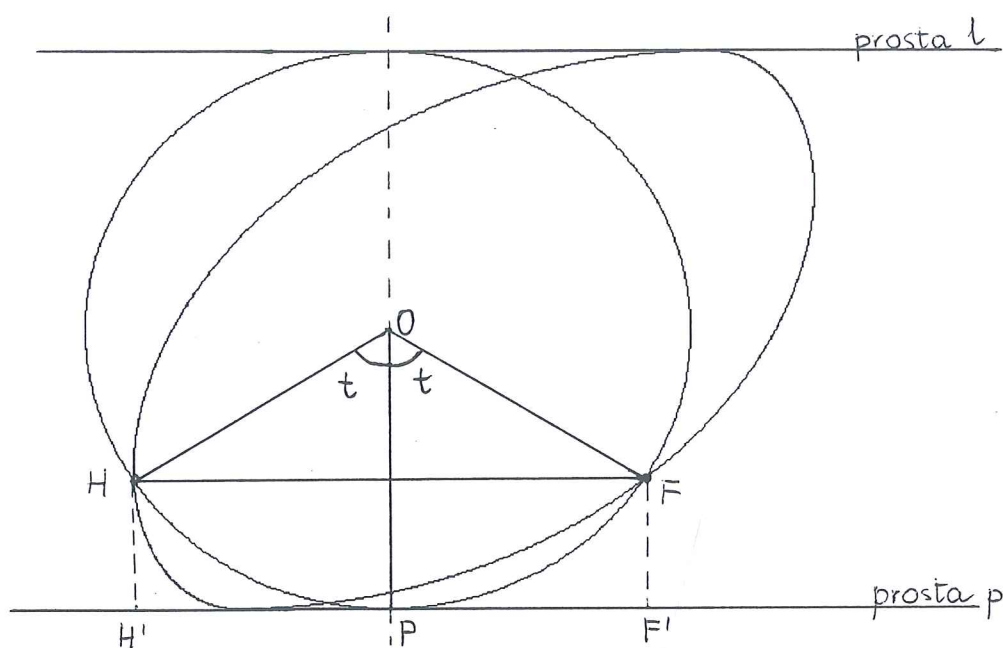
Zauważmy, że otrzymaliśmy figurę w kształcie owalu, nazwijmy ją figurą $2N$, którą odcinek PC dzieli na dwie przystające figury o równych polach. Równość pól wynika z faktu, że krzywa g i połowa gałęzi cycloidy wydłużonej są punktowo symetryczne względem punktu T , który jest punktem przecięcia odcinka PC i prostej, którą wyznacza ruch środka koła (rys.23).



Rys. 23

Jeżeli znajdziemy pole figury $2N$ to pole figury N będzie równe połowie jej pola. Pole figury $2N$ obliczymy wykorzystując wspomnianą zasadę Cavalieriego. Pokażemy, że pole figury $2N$ jest równe polu koła k_1 na brzegu którego znajduje się punkt M .

Figura $2N$ ma wysokość równą wysokości cycloidy czyli równą $2r_1$, czyli równą średnicy koła k_1 . Pokażę, że dla tego samego parametru t odcinki zwarte w kole k_1 i figurze $2N$ są poziome i równej długości. W tym celu obieramy punkt H na gałęzi cycloidy na wysokości h . Narysujmy odpowiednio przetoczony okrąg wyznaczający ten punkt. Oznaczmy przez t kąt o jaki obrócił się ten okrąg. Okrąg ten przecina krzywą g w punkcie F . Zauważmy, że okrąg ten można potraktować tak jakby przetoczył się o kąt t po prostej l , i że punkt F jest punktem wyznaczonym przez tak przetoczony okrąg. Położenie punktów przedstawia rysunek 24.



Rys. 24

Zauważmy, że punkt F jest punktem symetrycznym do punktu H względem prostej zawierającej odcinek OP. Ponieważ symetria osiowa zachowuje odległości punktów to $HH' = FF'$, czyli punkt F leży na tej samej wysokości co punkt H (rys.24).

Z rysunku 24 wynika, że odcinek HF ma taką samą długość co cięciwa koła k poprowadzona poziomo na wysokości h.

Wobec powyższego otrzymujemy, że na równych poziomach h (dla tego samego t) odcinki zawarte w figurze 2N i kole k_1 są poziome i mają taką samą długość. Na mocy zasady Cavalieriego pole figury 2N i pole koła są równe czyli pole figury 2N wynosi πr_1^2 .

Dla naszych obliczeń potrzebne jest pole figury N, a jest ono równe połowie pola figury 2N:

$$P_N = \frac{1}{2} P_{2N} = \frac{\pi r_1^2}{2} \quad (1.29)$$

natomiast pole figury W wynosi :

$$P_W = P_{\Delta ABC} + P_N = \pi r r_1 + \frac{\pi r_1^2}{2} \quad (1.30)$$

Pole figury ograniczonej gałęzią cycloidy wynosi :

$$P = 2P_w = 2\left(\pi r r_1 + \frac{\pi r_1^2}{2}\right) = 2\pi r r_1 + \pi r_1^2 \quad (1.31)$$

Teraz przedstawię drugi sposób w którym wykorzystam równania parametryczne cykloidy wydłużonej. Początek rozważań jest taki sam, tzn.: rozpatruję tylko jedną połowę gałęzi cykloidy, a następnie dzielę ją na dwie figury: trójkąt PBC i figurę W. Stosuję również ten sam sposób z rysowaniem krzywej g, gdzie otrzymuję owal (figurę 2N) o polu równym podwojonemu polu figury N. Pole figury 2N obliczę w ten sam sposób co w poprzednim rozważaniu, czyli na mocy zasady Cavalieriego porównam pola figury 2N i koła k_1 . Różnica polega na sposobie pokazania równości długości odcinków na tym samym poziomie h. Poziom h wyznacza nam wartość y w równaniach parametrycznych tych krzywych. Przedstawmy najpierw te równania:

-cykloidę zwyczajną opisuje funkcja zadana parametrycznie ($r < r_1$):

$$\begin{aligned} x &= tr - r_1 \sin t \\ y &= r - r_1 \cos t \end{aligned} \quad (1.32)$$

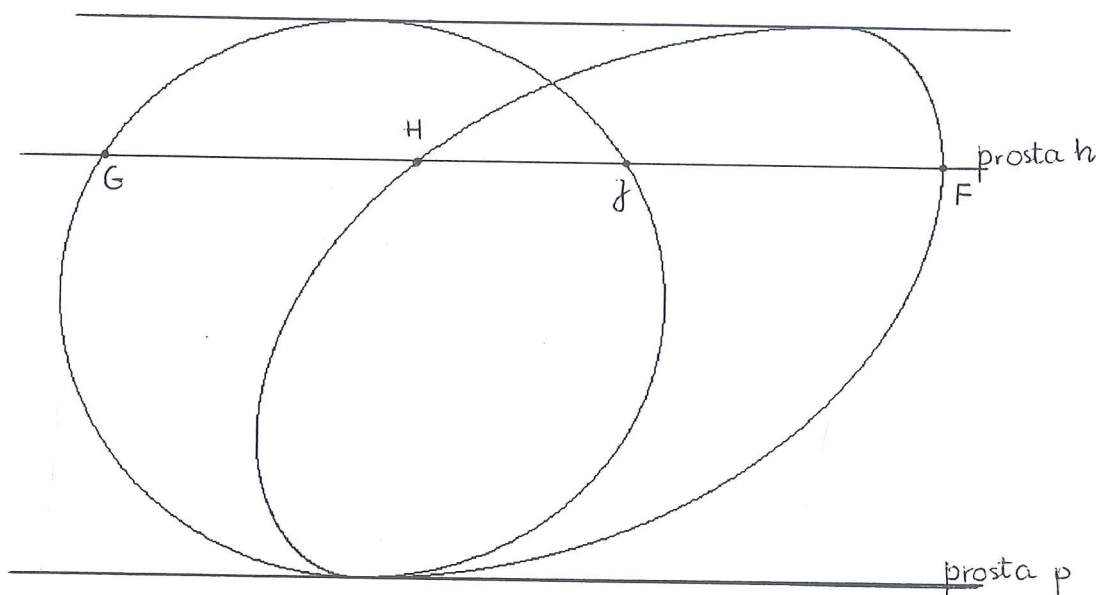
-krzywa g, którą wykreślił punkt U na kole toczącym się po prostej l jest opisana parametrycznie:

$$\begin{aligned} x &= rt + r_1 \sin t \\ y &= r - r_1 \cos t \end{aligned} \quad (1.33)$$

-okrąg koła k_1 jest opisany:

$$\begin{aligned} x &= r_1 \sin t \\ y &= r - r_1 \cos t \end{aligned} \quad (1.34)$$

Z równań (1.32), (1.33) i (1.34) zwraca uwagę zbieżność współrzędnej y. Stąd wynikanie, że każdej wysokości h w trzech równaniach odpowiada pewne (jedno i to samo w trzech równaniach) t. Zatem możemy długość odpowiednich odcinków poziomego przekroju na poziomie (wysokości) h obliczyć porównując współrzędne x dla tego t. Oznaczmy punkty : H jest to punkt przecięcia prostej h i gałęzi cykloidy zwyczajnej, F to punkt przecięcia prostej h i krzywej g oraz punkty G i J są to punkty przecięcia prostej h i koła k_1 , gdzie prosta h jest to prosta pozioma odległa od prostej l o $h = r - r_1 \cos t$ (rys. 25)



Rys. 25

Na mocy powyższego otrzymujemy, że każdym poziomie h zadany parametrycznie względem t długość odcinka HF (z różnicy ich współrzędnych x) wynosi:

$$|HF| = rt + r_1 \sin t - (rt - r_1 \sin t) = rt + r_1 \sin t - rt + r_1 \sin t = 2r_1 \sin t \quad (1.35)$$

Natomiast długość odcinka GJ na tym samym poziomie h to:

$$|GJ| = r_1 \sin t + r_1 \sin t = 2r_1 \sin t \quad (1.36)$$

A zatem na równych poziomach (dla tego samego t) mamy taką samą długość odcinków HF i GJ.

Na mocy zasady Cavalieriego pole figury Z i pole koła k_1 są równe czyli pole figury Z wynosi πr_1^2 .

W dalszych obliczeniach otrzymujemy analogiczne wyniki.

Podsumowując otrzymaliśmy, że pole pod gałęzią cykloidy wydłużonej wynosi $2\pi r_1 + \pi r_1^2$ czyli jest ono równe sumie pola prostokąta o bokach $2\pi r$ i r_1 oraz pola koła k_1 jest to koło współśrodkowe z kołem toczącym się o promieniu r_1 równym odległości punktu M od środka koła toczącego się.

1.4 Obliczenie pól figur ograniczonych cykloidą zwyczajną, skróconą, wydłużoną przy pomocy rachunku całkowego.

1.4.1 Cykloida zwyczajna

Przypomnę równanie cykloidy zwyczajnej :

$$\begin{aligned}x &= rt - r \sin t \\y &= r - r \cos t\end{aligned}\tag{1.37}$$

z wzorów (1.37) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}y &= r - r \cos t \\dx &= (r - r \cos t)dt\end{aligned}\tag{1.38}$$

oraz pole policzymy dla jednego obrotu koła, czyli $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$

podstawiając (1.38) do wzoru na pole

$$\int_a^b y dx\tag{1.39}$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} (r - r \cos t)(r - r \cos t) dt &= r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) dt = r^2 \left(t - 2 \sin t + \sin \frac{t}{2} + \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} \right) = \\&= r^2 \left(2\pi + \frac{2\pi}{2} \right) = 3\pi r^2\end{aligned}$$

co odpowiada wynikowi przy obliczeniu metodą Pascala (1.7).

1.4.2 Cykloida skrócona

Przypomnę równanie cykloidy skróconej ($r > r_1$):

$$\begin{aligned}x &= rt - r_1 \sin t \\y &= r - r_1 \cos t\end{aligned}\tag{1.40}$$

z wzorów (1.40) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}y &= r - r_1 \cos t \\dx &= (r - r_1 \cos t)dt\end{aligned}\tag{1.41}$$

oraz pole policzymy dla jednego obrotu koła, czyli $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$

podstawiając (1.41) do wzoru na pole otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} (r - r_1 \cos t)(r - r_1 \cos t)dt &= \int_0^{2\pi} (r^2 - 2rr_1 \cos t + r_1^2 \cos^2 t)dt = \left(tr^2 - 2rr_1 \sin t + r_1^2 \sin \frac{t}{2} + r_1^2 \cdot \right. \\&= 2\pi r^2 + r_1^2 \frac{2\pi}{2} = 2\pi r^2 + \pi r_1^2\end{aligned}$$

co odpowiada wynikowi przy obliczeniu metodą Pascala (1.21).

1.4.3 Cykloida wydłużona

Przypomnę równanie cykloidy wydłużonej ($r < r_1$):

$$\begin{aligned}x &= rt - r_1 \sin t \\y &= r - r_1 \cos t\end{aligned}\tag{1.42}$$

aby skorzystać z rachunku całkowego „przesuńmy oś OX” do prostej p (prosta p jest to prosta równoległa do kierownicy cykloidy wydłużonej leżąca poniżej kierownicy w odległości równej różnicy odległości punktu M od środka koła k (koła toczącego się) i promienia tego koła czyli $r_1 - r$, więc

$$\begin{aligned}x &= rt - r_1 \sin t \\y &= r - r_1 \cos t + (r_1 - r) = r_1 - r_1 \cos t\end{aligned}\tag{1.43}$$

z wzorów (1.43) otrzymuję:

$$\begin{aligned}y &= r_1 - r_1 \cos t \\dx &= (r - r_1 \cos t)dt\end{aligned}\tag{1.44}$$

oraz pole policzymy dla jednego obrotu koła, czyli $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$

podstawiając (1.44) do wzoru na pole otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} (r_1 - r_1 \cos t)(r - r_1 \cos t)dt &= \int_0^{2\pi} (rr_1 - r_1^2 \cos t - rr_1 \cos t + r_1^2 \cos^2 t)dt = \\&= trr_1 - r_1^2 \sin t - rr_1 \sin t + r_1^2 \sin \frac{t}{2} + r_1^2 \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 2\pi rr_1 + \pi r_1^2 \frac{2\pi}{2} = 2\pi rr_1 + \pi r_1^2\end{aligned}$$

co odpowiada wynikowi przy obliczeniu metodą Pascala (1.31).

Rozdział II

Pole pod spiralą Archimedesesa i ewolwentą

W rozdziale tym przedstawię sposób w jaki Archimedes obliczył pole figury ograniczonej spiralą Archimedesesa a następnie w analogiczny sposób obliczę pole figury ograniczonej ewolwentą.

W tym celu w paragrafie 2.1 przedstawię krzywą zwaną spiralą Archimedesesa natomiast w paragrafie 2.2 krzywa zwaną ewolwentą. W 2.3 pokażę, w jaki sposób Archimedes obliczył pole figury ograniczonej spiralą Archimedesesa, a w 2.4 w podobny sposób obliczę pole figury ograniczonej ewolwentą. Obliczenia te będą opierały się na elementarnej wiedzy z geometrii i matematyki. W celu porównania wyników te same pola obliczę przy pomocy rachunku całkowego w paragrafie 2.4.

2.1 Spirala Archimedesesa

Spirala Archimedesesa jest to krzywa zakreślona przez ustalony punkt M poruszający się ruchem jednostajnym (ze stałą prędkością v) po półprostej OS , począwszy od punktu O zwanego biegunem, gdy jednocześnie oś OS obraca się ze stałą prędkością kątową ω dookoła punktu O ³.

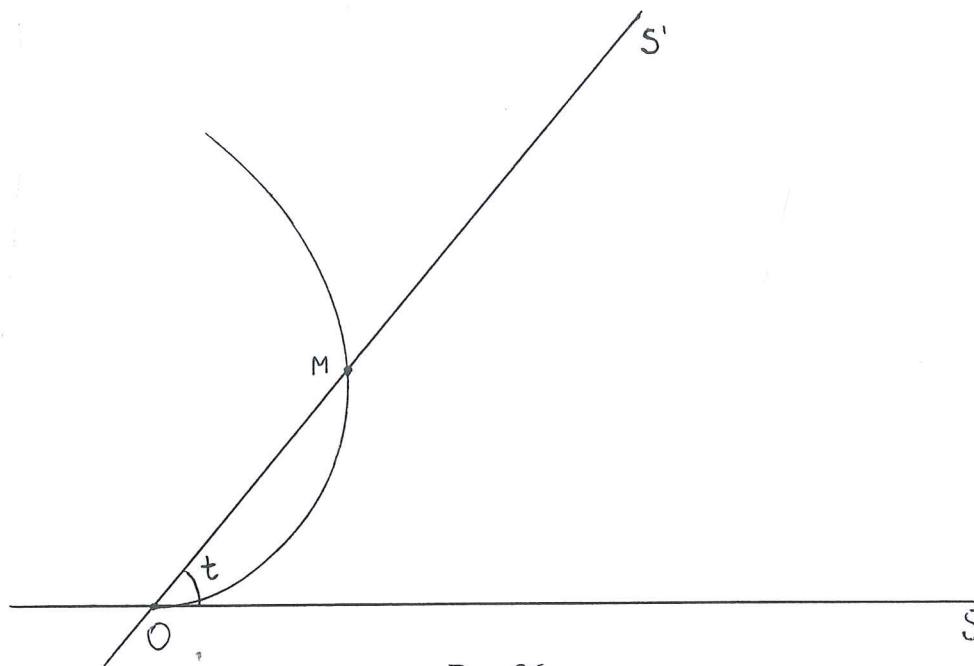
Niech oś Os (rys. 26) w wyniku obrotu o kąt t znajdzie się w położeniu OS_1 , a wybrany punkt kreślący spiralę z początkowego położenia O przejdzie w położenie M .

³ W. Krynicki, H. Pisarewska, T. Świątkowski, *Z geometrią za pan brat*, Warszawa 1992, str.175

Oznaczmy odległość $OM=r$. Ruch punktu M jest złożeniem dwóch ruchów: jednostajnego-postępowego prostoliniowego i obrotowego stąd r jest wielkością proporcjonalną do kąta t , czyli

$$r = at \quad (2.1)$$

gdzie $a = \frac{v}{\omega} > 0$ i jest to współczynnik proporcjonalności.



Rys. 26

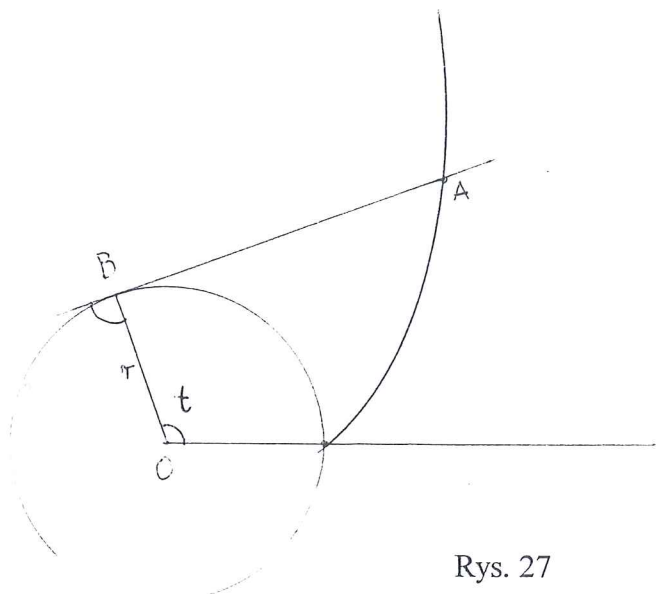
Zauważmy, że punkty spirali oddalają się od bieguna O wraz ze wzrostem argumentu t .

2.2 Ewolwenta

Ewolwenta jest to krzywa płaska, którą zakreśla punkt A znajdujący się na końcu nici rozwijającej się z okręgu stałego koła k o promieniu r i środku w punkcie O^4 (rys. 27). Zatem dla kąta t punkt A jest to punkt znajdujący się na stycznej w punkcie B , gdzie długość odcinka $|BA|$ jest równa długości łuku, który wyznacza kat t na obwodzie koła k .

$$|BA| = rt \quad (2.2)$$

⁴ I. N. Bronosztejn, K. A. Siemiendajew, *Matematyka, poradnik encyklopedyczny*, Warszawa 1995, str. 135

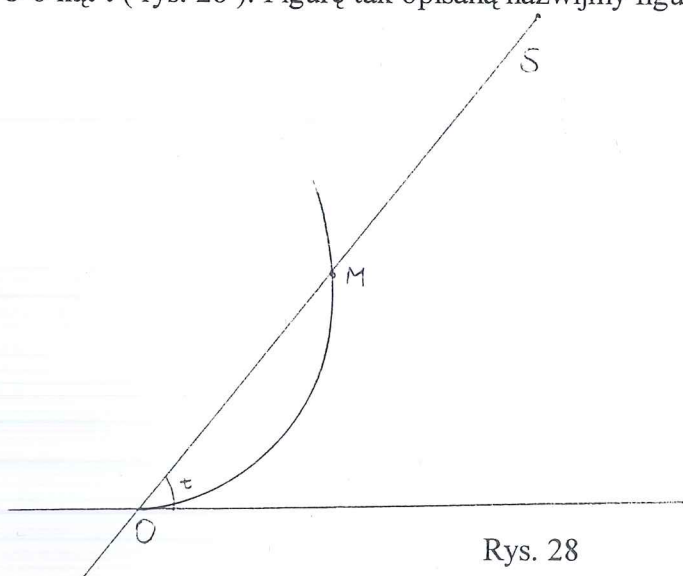


Rys. 27

2.3 Pole figury ograniczonej spiralą Archimedesesa

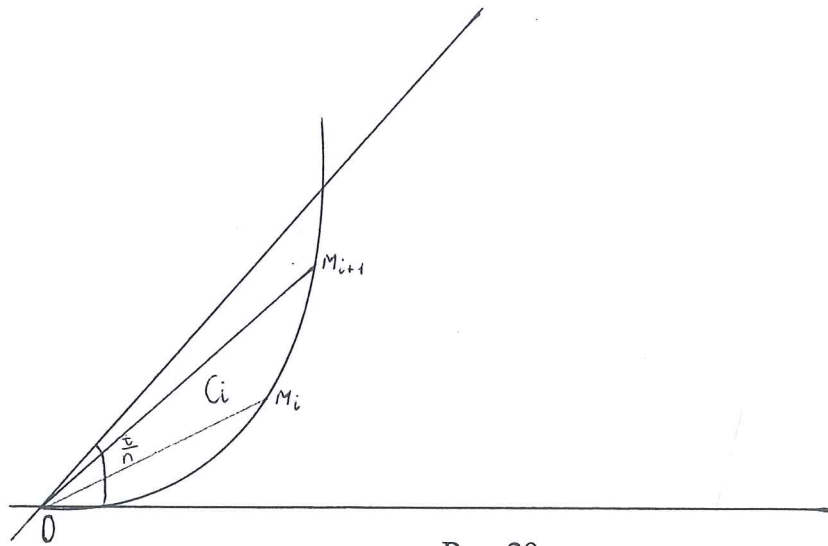
W paragrafie tym przedstawię sposób w jaki Archimedes obliczył pole figury ograniczonej spiralą Archimedesesa. W tym celu najpierw opiszę figurę ograniczoną spiralą, następnie podzielę ją na mniejsze figury, nazwijmy je wycinkami spirali. Pole obliczę poprzez szacowanie pól wycinków spirali od góry i od dołu polami wycinków kół, gdy wycinki te są wpisane lub opisane na wycinkach spirali.

Poprzez figurę ograniczoną spiralą Archimedesesa rozumiemy figurę zawartą pomiędzy fragmentem spirali OM i odcinkiem OM zawartym w prostej OS, gdy ta obróci się wokół punktu O o kąt t (rys. 28). Figurę tak opisaną nazwijmy figurą W.



Rys. 28

Archimedes obliczył pole figury W dzieląc ją na wycinki. Podziału dokonywał dzieląc kąt t na n równych części. Wycinki spirali oznaczmy C_i gdzie $i=1 \dots n$ (rys. 29).

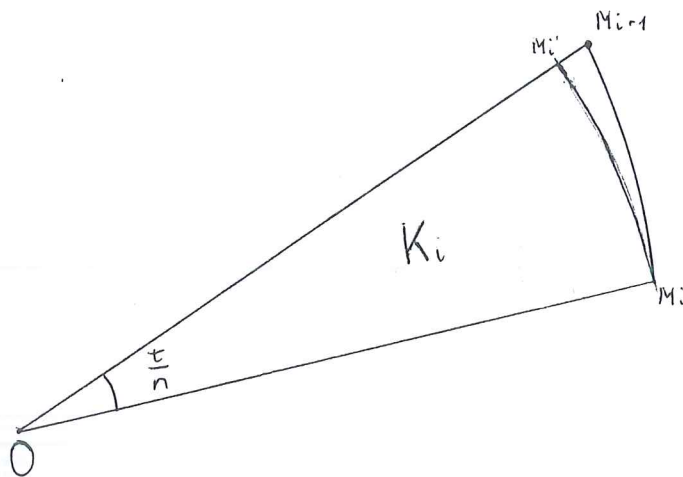


Rys. 29

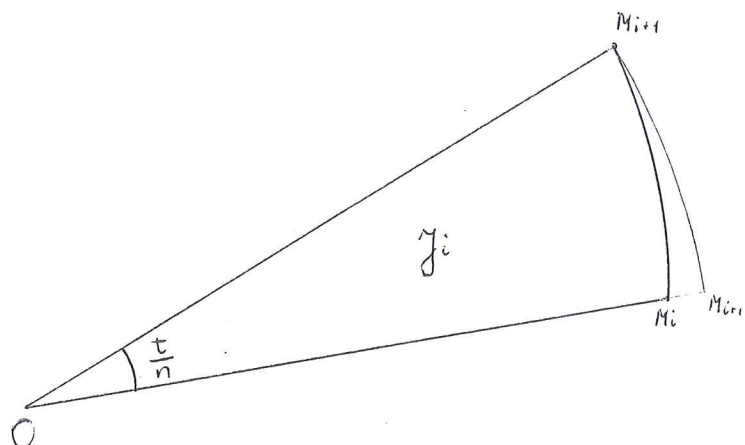
Pole figury W będzie równe sumie pól wycinków C_i

$$P_W = \sum_{i=1}^n P_{C_i} \tag{2.3}$$

gdzie P_{C_i} jest to pole i-tego wycinka spirali.



Rys. 30



Rys. 31

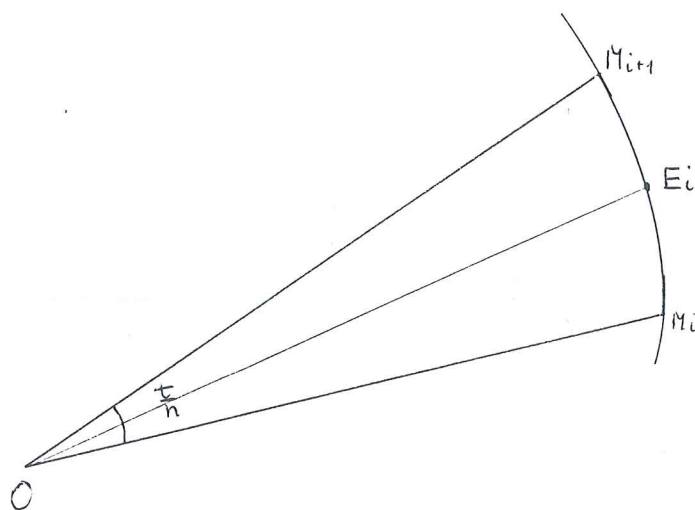
Pole wycinków C_i oszacujemy z góry i z dołu poprzez pola wycinków koła. Wycinek C_i jest opisany na wycinku koła K_i (rys. 30) oraz wpisany w wycinek koła J_i (rys. 31). Pomiedzy polami wycinków zachodzą zależności:

$$P_{K_i} < P_{C_i} < P_{J_i} \quad (2.4)$$

Nierówność (2.4) jest prawdziwa jeśli odpowiednie wycinki są w sobie zawarte, czyli wystarczy pokazać nierówność:

$$|OM_{i+1}| > |OE_i| > |OM_i| \quad (2.5)$$

gdzie położenie punktów pokazuje rys. 32.



Rys. 32

Dla pokazania nierówności (2.4) obliczę długości odpowiednich odcinków. Korzystając z (2.1) mamy, że:

$$|OM_{i+1}| = a \frac{(i+1)t}{n} \quad (2.6)$$

$$|OM_i| = a \frac{it}{n}$$

natomiast aby obliczyć długość odcinka $|OE_i|$ oznaczmy kąt M_iOE_i przez α , $0 < \alpha < \frac{t}{n}$

stąd:

$$|OE_i| = a \frac{it + \alpha}{n} = a \frac{(i+1)t - \alpha}{n} \quad (2.7)$$

z (2.7) otrzymujemy:

$$|OE_i| = a \frac{it + \alpha}{n} = a \frac{it}{n} + a \frac{\alpha}{n} > a \frac{it}{n} = |OM_i| \quad (2.8)$$

$$|OE_i| = a \frac{(i+1)t - \alpha}{n} = a \frac{it}{n} - a \frac{\alpha}{n} < a \frac{(i+1)t}{n} = |OA_{i+1}|$$

z (2.8) wynika nierówność (2.5), czyli odpowiednie wycinki spirali i koła zawierają się w sobie oraz prawdziwa jest nierówność (2.4).

Oszacujmy pole wycinka C_i zgodnie z (2.4). Najpierw oszacujmy z dołu:

$$P_{C_i} > P_{K_i} \quad (2.9)$$

gdzie P_{K_i} jest polem wycinka koła o promieniu $|OM_i| = a \frac{it}{n}$ i kącie M_iOM_{i+1} równym $\frac{t}{n}$.

Zatem:

$$P_{K_i} = \frac{1}{2} \frac{t}{n} \left(\frac{ait}{n} \right)^2 \quad (2.10)$$

z (2.9) i (2.10) wynika, że

$$P_{C_i} > \frac{1}{2} \frac{t}{n} \left(\frac{ait}{n} \right)^2 \quad (2.11)$$

Zatem pole figury W oszacowane z dołu wynosi:

$$\begin{aligned} P_W &= \sum_{i=1}^n P_{C_i} > \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \frac{t}{n} \left(\frac{ait}{n} \right)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{a^2 t^3}{2n^3} i^2 = \frac{a^2 t^3}{2n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = \\ &= \frac{a^2 t^3}{2n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{a^2 t^3 (2n^3 + 3n^2 + n)}{12n^3} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Teraz oszacujmy z góry:

$$P_{C_i} < P_{J_i} \quad (2.13)$$

gdzie P_{J_i} jest polem wycinka koła o promieniu $|OM_i| = a \frac{(i+1)t}{n}$ i kącie $M_i OM_{i+1}$

równym $\frac{t}{n}$. Zatem:

$$P_{J_i} = \frac{1}{2} \frac{t}{n} \left(\frac{a(i+1)t}{n} \right)^2 \quad (2.14)$$

z (2.13) i (2.14) wynika, że

$$P_{C_i} < \frac{1}{2} \frac{t}{n} \left(\frac{a(i+1)t}{n} \right)^2 \quad (2.15)$$

Zatem pole figury W oszacowane z góry wynosi:

$$\begin{aligned} P_W &= \sum_{i=1}^n P_{C_i} < \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \frac{t}{n} \left(\frac{a(i+1)t}{n} \right)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{a^2 t^3}{2n^3} (i+1)^2 = \\ &= \frac{a^2 t^3}{2n^3} (1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2) = \\ &= \frac{a^2 t^3}{2n^3} \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{a^2 t^3 (2n^3 + 7n^2 + 6n)}{12n^3} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Zbadajmy do czego dążą oszacowania pola P_W (gdy $n \rightarrow \infty$, a więc:

z dołu (2.12)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^2 t^3 (2n^3 + 3n^2 + n)}{12n^3} = a^2 t^3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{12n^3} = \frac{1}{6} a^2 t^3 \quad (2.17)$$

z góry (2.16)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^2 t^3 (2n^3 + 7n^2 + 6n)}{12n^3} = a^2 t^3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 7n^2 + 6n}{12n^3} = \frac{1}{6} a^2 t^3 \quad (2.18)$$

Otrzymaliśmy, że przy podziale kąta t na nieskończenie wiele małych kątów pole figury W z niedomiarem (2.17) i z nadmiarem (2.18) dążą do tej samej wartości $\frac{1}{6} a^2 t^3$.

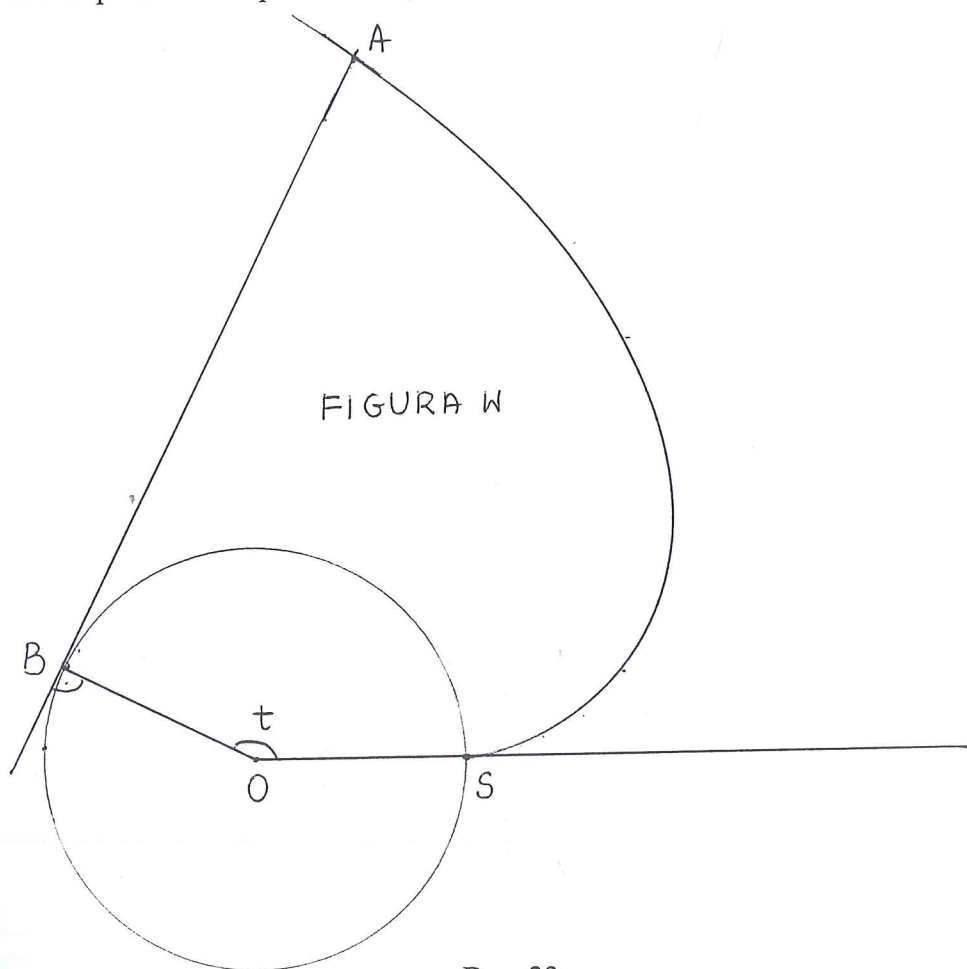
Stąd otrzymujemy, że pole figury W wynosi:

$$P_W = \frac{1}{6} a^2 t^3 \quad (2.19)$$

2.4 Pole figury ograniczonej ewolwentą

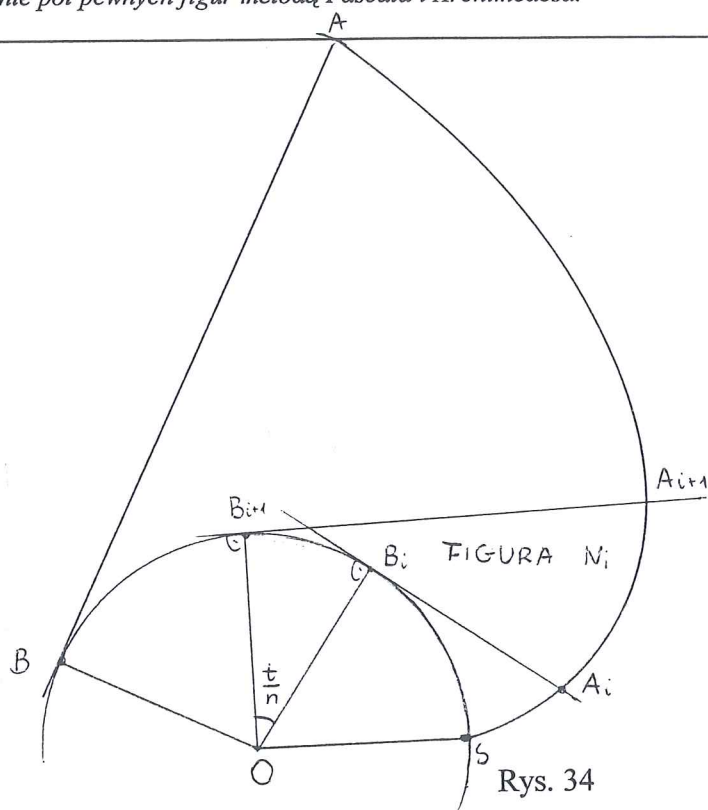
W paragrafie tym obliczę pole figury ograniczonej ewolwentą w analogiczny sposób w jaki Archimedes obliczył pole figury ograniczonej spiralą Archimedesesa. W tym celu najpierw opiszę figurę ograniczoną ewolwentą (definicja tej krzywej w paragrafie 2.2), następnie podzielę ją na mniejsze figury. Pole obliczę poprzez szacowanie pól tych figur.

Poprzez figurę ograniczoną ewolwentą rozumiemy figurę zawartą pomiędzy fragmentem ewolventy SA, odcinkiem AB oraz łukiem SB koła k (przypomnijmy jest to koło o środku w punkcie O i promieniu r) (rys. 33). Figurę tak opisaną nazwijmy figurą W .

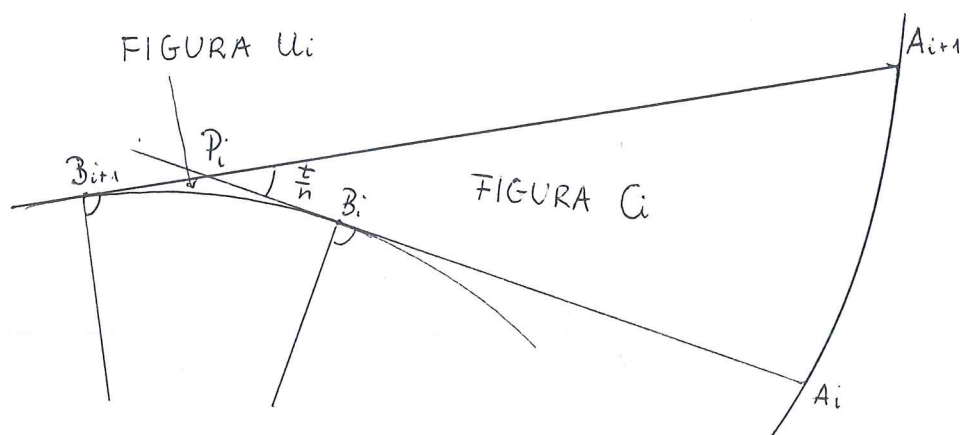


Rys. 33

Figurę W dzielimy na mniejsze figury. Podziału dokonujemy dzieląc kąt t na n równych części ($A_1=S$). Figury te oznaczmy N_i gdzie $i=1\dots n$ (rys. 34), gdzie N_1 jest figurą ograniczoną fragmentem ewolventy A_iA_{i+1} , odcinkami A_iB_i i $A_{i+1}B_{i+1}$ oraz łukiem koła B_iB_{i+1} .



Natomiast każdą z figur N_i podzielmy na dwie figury C_i i U_i (rys. 35). C_i jest to figura przypominająca wycinek ograniczona fragmentem ewolwenty $A_i A_{i+1}$ oraz odcinkami $A_i P_i$ i $A_{i+1} P_i$, gdzie P_i jest punktem przecięcia się stycznej $A_i B_i$ z odcinkiem $A_{i+1} B_{i+1}$. Figura U_i jest to figura powstała poprzez odcięcie od czworokąta $OB_i P_i B_{i+1}$ wycinka koła k $B_i O B_{i+1}$.



Rys. 35

Pole figury W będzie równe sumie pól figur N_i

$$P_W = \sum_{i=1}^n P_{N_i} \tag{2.20}$$

gdzie P_{N_i} jest to pole i -tego wycinka ewolwenty.

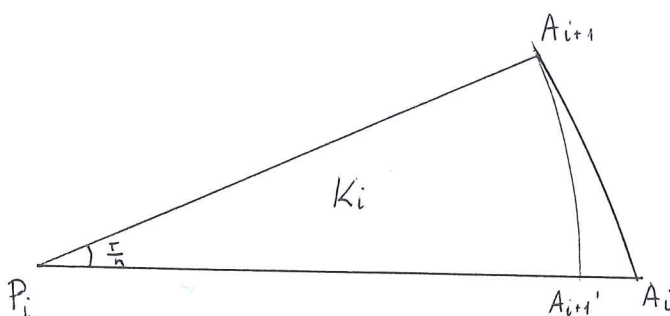
Natomiast pole figur N_i obliczymy jako sumę pól figur C_i i U_i

$$P_{N_i} = P_{C_i} + P_{U_i} \quad (2.21)$$

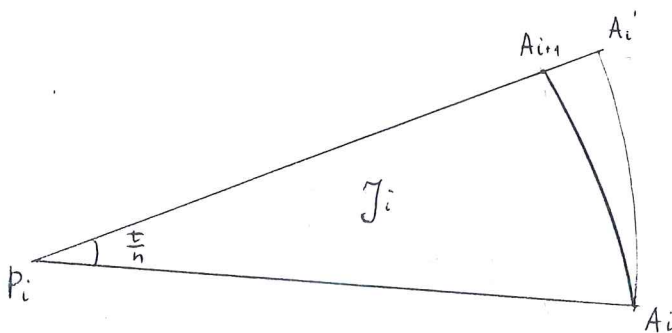
Pole figury U_i wyliczymy jako różnicę pól czworokąta $OB_iP_iB_{i+1}$ i wycinka koła $k_{B_iOB_{i+1}}$

$$P_{U_i} = P_{OB_iP_iB_{i+1}} - P_{B_iOB_{i+1}} = r^2 \operatorname{tg} \frac{t}{2n} - \frac{r^2 t}{2n} \quad (2.22)$$

Natomiast pole figury- wycinka C_i oszacujemy z góry i z dołu poprzez wycinki koła. Wycinek C_i jest opisany na wycinku koła K_i (rys. 36) oraz wpisany w wycinek koła J_i (rys. 37).



Rys. 36



Rys. 37

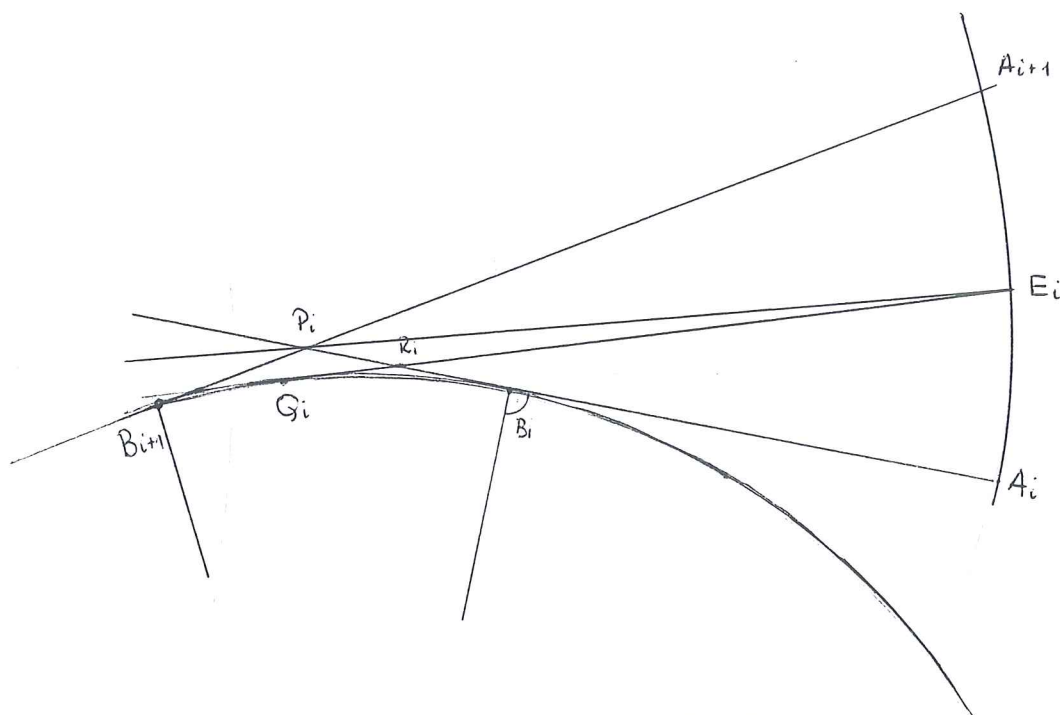
Pomiędzy polami wycinków zachodzą zależności:

$$P_{K_i} < P_{C_i} < P_{J_i} \quad (2.23)$$

Nierówność (2.4) jest prawdziwa jeśli odpowiednie wycinki są w sobie zawarte, czyli wystarczy pokazać nierówność:

$$|P_i A_{i+1}| < |P_i E_i| < |P_i A_i| \quad (2.24)$$

gdzie położenie punktów pokazuje rys. 38.



Rys. 38

Dla pokazania nierówności (2.4) skorzystam z postulatu Archimedesesa (który był przyjmowany przez niego za pewnik, bez uzasadnienia).

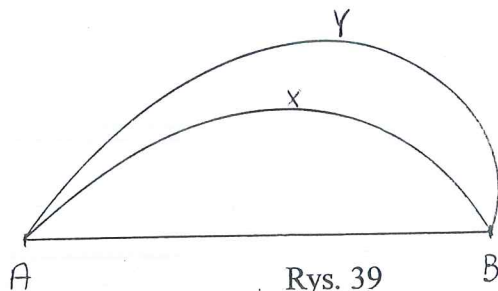
Postulat Archimedesesa

Jeśli punkty A, B połączone są dwoma liniami AXB i AYB (rys. 39), dla których spełnione są następujące założenia:

1° figura ABXA zawarta pomiędzy odcinkiem AB oraz linią AXB, oraz figura ABYA zawarta pomiędzy odcinkiem AB oraz linią AYB są obie wypukłe;

2° figura ABXA jest istotnie zawarta w figurze ABYA;

to długość linii AXB jest mniejsza niż długość linii AYB.



Rys. 39

Postulat ten został sformułowany i szeroko wykorzystywany przez Archimedesesa. Więcej informacji na ten temat można znaleźć w książce Dijksterhuisa *Archimedes*.

Korzystając z powyższego postulatu pokaże, że wycinek C_i jest opisany na wycinku koła K_i (rys. 36) oraz wpisany w wycinek koła J_i (rys. 37). W tym celu weźmy dowolny punkt E leżący na fragmencie ewolwenty A_iA_{i+1} , któremu odpowiada punkt na kole Q_i (rys. 38).

Pokażemy, że prawdziwa jest równość :

$$|A_iP_i| > |E_iP_i| > |A_{i+1}P_i| \quad (2.25)$$

Najpierw pokażę nierówność:

$$|A_iP_i| > |E_iP_i| \quad (2.26)$$

W tym celu wprowadzę dodatkowy punkt R_i , jest to punkt przecięci odcinków A_iP_i i E_iQ_i (rys. 54). Z definicji ewolwenty mamy:

$$\text{tutaj } |B_iQ_i| + |A_iB_i| = |R_iQ_i| + |E_iR_i| \quad (2.27)$$

Zauważmy, że z postulatu Archimedesesa wynika nierówność:

$$\text{tutaj } |B_iQ_i| + |B_iA_i| < |R_iA_i| + |R_iQ_i| \quad (2.28)$$

obie te linie oparte są na tym samym odcinku A_iQ_i oraz odpowiednie figury są wypukłe i zawierają się w sobie. Z (2.27) i (2.28) wynika, że

$$|R_iE_i| < |R_iA_i| \quad (2.29)$$

Z nierówności trójkąta $P_iR_iE_i$ wynika :

$$|P_iE_i| < |R_iP_i| + |R_iE_i| \quad (2.30)$$

podstawiając (2.29) do (2.30) mamy:

$$|P_iE_i| < |P_iR_i| + |R_iE_i| < |P_iR_i| + |A_iR_i| = |P_iA_i| \quad (2.31)$$

Z (2.31) otrzymaliśmy:

$$|P_iE_i| < |P_iA_i| \quad (2.32)$$

Natomiast nierówność

$$|E_iP_i| > |A_{i+1}P_i| \quad (2.33)$$

Na podstawie postulatu Archimedesesa otrzymujemy

$$\text{tutaj } |B_{i+1}Q_i| + |E_iQ_i| < |E_iP_i| + |P_iB_{i+1}| \quad (2.34)$$

z własności ewolwenty wiemy, że

$$\text{tutaj } |B_{i+1}Q_i| + |E_iQ_i| = |A_{i+1}B_{i+1}| \quad (2.35)$$

podstawiając (2.34) do (2.33) mamy

$$|A_{i+1}B_{i+1}| < |E_iP_i| + |P_iB_{i+1}| \quad (2.36)$$

natomiast

$$|A_{i+1}B_{i+1}| = |A_{i+1}P_i| + |P_iB_{i+1}| \quad (2.37)$$

podstawiając (2.36) do (2.35) otrzymujemy

$$|A_{i+1}P_i| + |P_iB_{i+1}| < |E_iP_i| + |P_iB_{i+1}| \quad (2.38)$$

odejmując stronami $|P_iB_{i+1}|$ od nierówności (2.37) dostaniemy

$$|A_{i+1}P_i| < |E_iP_i| \quad (2.39)$$

Podsumowując otrzymaliśmy, że nierówność (2.25) jest prawdziwa, a zatem wycinek C_i jest opisany na wycinku koła K_i oraz wpisany w wycinek koła J_i .

Oszacujmy pole figury W zgodnie z (2.21). Najpierw oszacujmy z dołu:

$$P_{C_i} > P_{K_i} \quad (2.40)$$

gdzie P_{K_i} jest polem wycinka koła o promieniu $|P_iA_{i+1}| = \frac{itr}{n}$ – w i kącie A_iOA_i równym

$\frac{t}{n}$, gdzie w jest to długość odcinka $|P_iB_{i+1}| = |Q_iP_i| = r \operatorname{tg} \frac{t}{2n}$. Zatem:

$$P_{K_i} = \frac{1}{2} \frac{t}{n} \left(\frac{rit}{n} - r \operatorname{tg} \frac{t}{2n} \right)^2 = \frac{t^3 i^2 r^2}{2n^3} - \frac{t^2 i r^2}{2n^2} \operatorname{tg} \frac{t}{2n} + \frac{tr^2}{2n} \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2n} \quad (2.41)$$

z (2.39) i (2.40) wynika, że

$$P_{C_i} > \frac{t^3 i^2 r^2}{2n^3} - \frac{t^2 i r^2}{2n^2} \operatorname{tg} \frac{t}{2n} + \frac{tr^2}{2n} \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2n} \quad (2.42)$$

Zatem pole figury W oszacowane z dołu wynosi:

$$\begin{aligned} P_W &= \sum_{i=1}^n P_{N_i} = \sum_{i=1}^n (P_{U_i} + P_{C_i}) > \sum_{i=1}^n \left(r^2 \operatorname{tg} \frac{t}{2n} - \frac{r^2 t}{2n} + \frac{t^3 i^2 r^2}{2n^3} - \frac{t^2 i r^2}{2n^2} \operatorname{tg} \frac{t}{2n} + \right. \\ &+ \left. \frac{tr^2}{2n} \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2n} \right) = n \left(r^2 \operatorname{tg} \frac{t}{2n} \right) - n \left(\frac{r^2 t}{2n} \right) + \frac{t^3 r^2}{2n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) - \\ &- \frac{t^2 r^2}{2n^2} (1 + 2 + 3 + \dots + n) \operatorname{tg} \frac{t}{2n} + n \frac{tr^2}{2n} \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2n} = nr^2 \operatorname{tg} \frac{t}{2n} - \frac{r^2 t}{2} + \\ &+ \frac{t^3 r^2 (2n^3 - 3n^2 + n)}{12n^3} - \frac{t^2 r^2 (n + n^2)}{4n^2} \operatorname{tg} \frac{t}{2n} + \frac{tr^2}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2n} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Teraz oszacujmy z góry:

$$P_{C_i} < P_{J_i} \quad (2.44)$$

gdzie P_{J_i} jest polem wycinka koła o promieniu $|P_i A_i| = \frac{itr}{n} + w$ i kącie $A_i O A_{i+1}$ równym

$\frac{t}{n}$, gdzie w jest to długość odcinka $|P_i B_{i+1}| = |Q_i P_i| = r \operatorname{tg} \frac{t}{2n}$. Zatem:

$$P_{J_i} = \frac{1}{2} \frac{t}{n} \left(\frac{rit}{n} + r \operatorname{tg} \frac{t}{2n} \right)^2 = \frac{t^3 i^2 r^2}{2n^3} + \frac{t^2 i r^2}{2n^2} \operatorname{tg} \frac{t}{2n} + \frac{tr^2}{2n} \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2n} \quad (2.45)$$

z (2.43) i (2.44) wynika, że

$$P_{C_i} < \frac{t^3 i^2 r^2}{2n^3} + \frac{t^2 i r^2}{2n^2} \operatorname{tg} \frac{t}{2n} + \frac{tr^2}{2n} \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2n} \quad (2.46)$$

Zatem pole figury W oszacowane z dołu wynosi:

$$\begin{aligned} P_W &= \sum_{i=1}^n P_{N_i} = \sum_{i=1}^n (P_{U_i} + P_{C_i}) > \sum_{i=1}^n \left(r^2 \operatorname{tg} \frac{t}{2n} - \frac{r^2 t}{2n} + \frac{t^3 i^2 r^2}{2n^3} + \frac{t^2 i r^2}{2n^2} \operatorname{tg} \frac{t}{2n} + \right. \\ &+ \left. \frac{tr^2}{2n} \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2n} \right) = n \left(r^2 \operatorname{tg} \frac{t}{2n} \right) - n \left(\frac{r^2 t}{2n} \right) + \frac{t^3 r^2}{2n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + \\ &+ \frac{t^2 r^2}{2n^2} (1 + 2 + 3 + \dots + n) \operatorname{tg} \frac{t}{2n} + n \frac{tr^2}{2n} \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2n} = nr^2 \operatorname{tg} \frac{t}{2n} - \frac{r^2 t}{2} + \\ &+ \frac{t^3 r^2 (2n^3 - 3n^2 + n)}{12n^3} + \frac{t^2 r^2 (n + n^2)}{4n^2} \operatorname{tg} \frac{t}{2n} + \frac{tr^2}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2n} \end{aligned} \quad (2.47)$$

Zbadajmy do czego dążą oszacowania pola P_W (gdy $n \rightarrow \infty$), a więc przy szacowaniu z dołu (2.42)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(nr^2 \operatorname{tg} \frac{t}{2n} - \frac{r^2 t}{2} + \frac{t^3 r^2 (2n^3 - 3n^2 + n)}{12n^3} - \right. \\ \left. \frac{t^2 r^2 (n + n^2)}{4n^2} \operatorname{tg} \frac{t}{2n} + \frac{tr^2}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2n} \right) = \frac{r^2 t}{2} - \frac{r^2 t}{2} + \frac{t^3 r^2}{6} = \frac{r^2 t^3}{6} \end{aligned} \quad (2.48)$$

z góry (2.46)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(nr^2 \operatorname{tg} \frac{t}{2n} - \frac{r^2 t}{2} + \frac{t^3 r^2 (2n^3 - 3n^2 + n)}{12n^3} + \right. \\ \left. + \frac{t^2 r^2 (n + n^2)}{4n^2} \operatorname{tg} \frac{t}{2n} + \frac{tr^2}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2n} \right) = \frac{r^2 t}{2} - \frac{r^2 t}{2} + \frac{t^3 r^2}{6} = \frac{r^2 t^3}{6} \end{aligned} \quad (2.49)$$

Otrzymaliśmy, że przy podziale kąta t na nieskończenie wiele małych kątów pole figury W z niedomiarem (2.47) i z nadmiarem (2.48) dążą do tej samej wartości $\frac{t^3 r^2}{6}$.

Stąd otrzymujemy, że pole figury W wynosi:

$$P_W = \frac{t^3 r^2}{6} \quad (2.50)$$

2.5 Obliczenie pola figur ograniczonych spiralą Archimedesesa i ewolwentą przy użyciu rachunku całkowego

2.5.1 Spirala Archimedesesa

Równanie spirali w zmiennych biegunowych to:

$$r = a\alpha \quad (2.51)$$

podstawiając (2.50) do wzoru na pole otrzymujemy:

$$\int_0^t \frac{1}{2} (a\alpha)^2 d\alpha = \frac{1}{2} \frac{1}{3} a^2 t^3 = \frac{1}{6} a^2 t^3 \quad (2.52)$$

co odpowiada wynikowi przy obliczeniu metodą Archimedesesa (2.19).

2.5.2 Ewolwenta

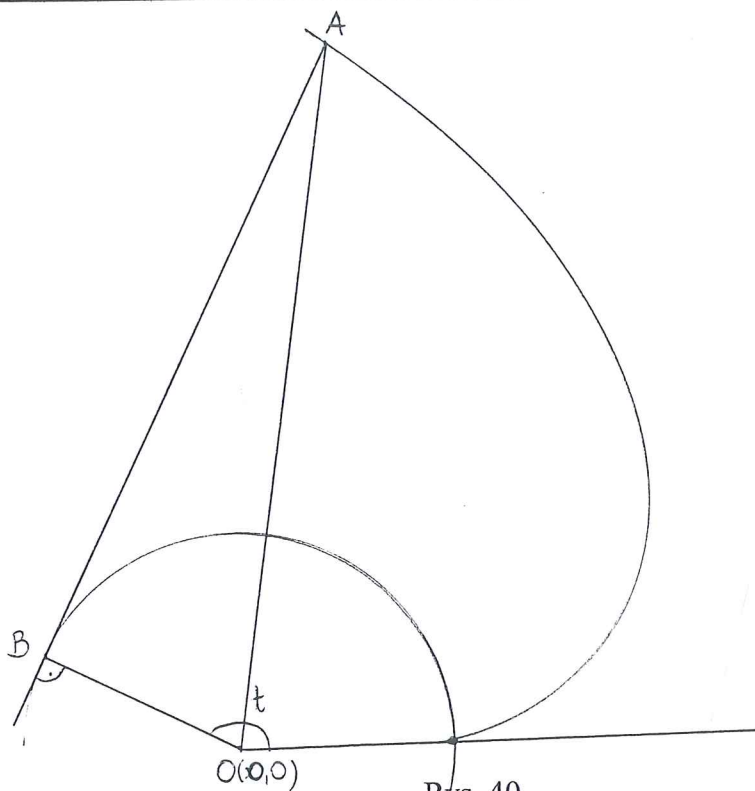
Równanie parametryczne ewolwenty to:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \alpha + r\alpha \sin \alpha \\ y &= r \sin \alpha - r\alpha \cos \alpha \end{aligned} \quad (2.53)$$

Wzór na pole (rys. 40) to :

$$\int_0^t \frac{1}{2} (x'(y - y_0) - y'(x - x_0)) d\alpha + P_{OBA} - P_W \quad (2.54)$$

gdzie x_0, y_0 to współrzędne punktu O (środek koła), P_{OBA} jest to pole trójkąta OBA , natomiast P_W jest to pole wycinka koła o kącie środkowym t .



Rys. 40

Z (2.53) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} x' &= -r \sin \alpha + r \sin \alpha + r \alpha \cos \alpha = r \alpha \cos \alpha \\ y' &= r \cos \alpha + r \cos \alpha - r \alpha \sin \alpha = -r \alpha \sin \alpha \end{aligned} \quad (2.55)$$

Pole wycinka W jest równe :

$$P_W = \frac{1}{2} r^2 \alpha \quad (2.56)$$

Natomiast pole trójkąta OBA obliczymy wiedząc, że jest to trójkąt prostokątny oraz znając długości jego boków. Bok OB. Jest równy r i jest to promień koła, bok AB równa się długości łuku OB (z definicji ewolwenty) i wynosi:

$$P_{OAB} = \frac{1}{2} r r \alpha = \frac{1}{2} r^2 \alpha \quad (2.57)$$

Podstawiając (2.55), (2.56), (2.57) do wzoru (2.54) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} & \int_0^t \frac{1}{2} (x'(y - y_0) + y'(x - x_0)) d\alpha + P_{OBA} - P_W = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t r \alpha \cos \alpha (r \sin \alpha - r \alpha \cos \alpha) - r \alpha \sin \alpha (r \cos \alpha + r \alpha \sin \alpha) d\alpha + \\ &+ \frac{1}{2} r^2 \alpha - \frac{1}{2} r^2 \alpha = \frac{1}{2} \int_0^t r^2 \alpha^2 d\alpha = \frac{1}{6} r^2 \alpha^3 \end{aligned}$$

co odpowiada wynikowi przy obliczeniu metodą Archimedesesa (2.50).

Literatura

- [1] J. Mioduszewski, *Ciągłość*, Warszawa, 1996.
- [2] W. Krywicki, H. Pisarewska, T. Świątkowski, *Z geometrią za pan brat*
Warszawa 1992.
- [3] Dijksterhuis, *Archimedes*, Princeton 1987.
- [4] A. P. Juszkiewicz, *Historia matematyki*, Warszawa 1975.
- [4] I. N. Bronsztejn, K. A. Siemiendajew, *Matematyka, poradnik*
encyklopedyczny, Warszawa 1995.
- [5] W. Zawadowski, *Cykloida*, Skrypt Warszawa 1994.
- [6] M. Kordos, *Pole pod cykloidą*, Delta Warszawa 6/2000