

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność:

Julia Bugiel

Klasyfikacja parkietaży 2-Archimedesowych

Praca magisterska
napisana pod kierunkiem
prof. dr hab. Jacka Świątkowskiego

Wrocław 2017

.....
(imiona i nazwisko)

.....
(aktualny adres do korespondencji)

.....
(adres e-mail)

.....
(wydział)

.....
(kierunek studiów)

.....
(poziom i forma studiów)

.....
(numer PESEL)

.....
(numer albumu)

ÓŚWIADCZENIE O PRAWACH AUTORSKICH I DANYCH OSOBOWYCH

Ja niżej podpisany/a student/ka Wydziału
..... kierunek

oświadczam, że przedkładana praca dyplomowa na temat:

.....
.....
.....

- jest mojego autorstwa i nie narusza autorskich praw w rozumieniu ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (tekst jednolity: Dz. U. z 2006 r. Nr 90, poz. 631, z późn. zm.) oraz dóbr osobistych chronionych prawem;
- nie zawiera danych i informacji uzyskanych w sposób niedozwolony;
- nie była wcześniej przedmiotem innej urzędowej procedury związanej z nadaniem dyplomu uczelni wyższej lub tytułu zawodowego;
- treść pracy dyplomowej przedstawionej do obrony, zawarta na przekazanym nośniku elektronicznym, jest identyczna z jej wersją drukowaną.

Oświadczam, iż zostałem/am poinformowany/a o prawie dostępu do treści moich danych osobowych oraz ich poprawiania.

Udostępnienie przez mnie danych osobowych ma charakter dobrowolny.

Wyrażam zgodę, na:

- udostępnienie mojej pracy dla celów naukowych i dydaktycznych;
- przetwarzanie moich danych osobowych w myśl ustawy z dnia 29 sierpnia 1997 r. o ochronie danych osobowych (tekst jednolity: Dz. U. z 2014 r., poz. 1182, z późn. zm.);
- umieszczenie mojej pracy w bazie danych Uczelni i jej przechowywanie przez okres stosowny do potrzeb Uczelni;
- wykorzystanie mojej pracy jako elementu komparatywnej bazy danych Uczelni;
- udostępnienie mojej pracy innym podmiotom celem prowadzenia kontroli antyplagiatowej prac dyplomowych i innych tekstów, które zostaną opracowane w przyszłości;
- porównywanie tekstu mojej pracy z tekstami innych prac znajdujących się w bazie porównawczej systemu antyplagiatowego i zasobach Internetu.

Wrocław,
(rrrr – mm – dd)

.....
(czytelny podpis autora)

Spis treści

Wstęp.....	4
1. Podstawowe informacje dotyczące parkietaży	5
1.1. 21 możliwości zabudowania wierzchołka wielokątami foremnymi.....	6
1.2. Rodzaje parkietaży	7
2. Parkietaże 2-Archimedesowe.....	9
2.1. Budowa parkietaży 2-Archimedesowych.....	10
2.2. Klasyfikacja parkietaży 2-Archimedesowych.....	25
3. Liczba parkietaży	41
3.1. Skończona liczba parkietaży	41
3.2. nieskończona liczba parkietaży	52
Bibliografia.....	58

Wstęp

Celem niniejszej pracy jest pokazanie, z jakich par typów wierzchołków można utworzyć parkietaże 2-Archimedesowe tzn. parkietaże zbudowane z niejednakowych wielokątów foremnych, które posiadają dwa i tylko dwa różne układy płytek wokół wierzchołków.

Praca została napisana w sposób elementarny, bez użycia zaawansowanych operacji matematycznych stąd może być lekturą dla studentów kierunków ścisłych jak i uczniów szkół średnich.

Rozdział pierwszy ma charakter wprowadzający. Zostały w nim wyjaśnione podstawowe pojęcia dotyczące parkietaży oraz przypomniane parkietaże foremne i półforemne, a także została przedstawiona lista 21 możliwych kombinacji zabudowań wielokątów wokół wierzchołka.

W rozdziale drugim zajmujemy się budową parkietaży 2-Archimedesowych. Korzystając ze wspomnianej wcześniej listy, wykluczamy pary typów wierzchołków, z których nie można utworzyć parkietażu 2-Archimedesowego. Następnie pokazujemy, że pozostałymi parami dwóch typów wierzchołków potrafimy szczelnie wypełnić całą płaszczyznę. A dokładniej, że tworzą one parkietaże 2-Archimedesowe.

W ostatnim rozdziale odpowiadamy na pytanie, ile dokładnie można utworzyć parkietaży 2-Archimedesowych o danych dwóch typach wierzchołków.

1. Podstawowe informacje dotyczące parkietaży

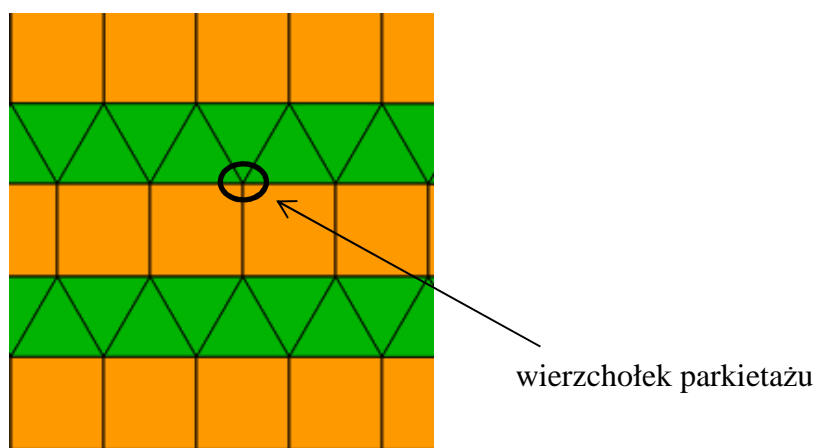
Na początku chciałabym przypomnieć kilka podstawowych pojęć dotyczących parkietaży.

Definicja 1.1 *Parkietaż jest to pokrycie płaszczyzny ściśle przylegającymi i niezachodzącymi na siebie płytkami.*

Definicja 1.2. *Parkietaż wielokątowy foremny to taki parkietaż, którego wszystkie płytki są wielokątami foremnymi. Ponadto każde dwie płytki są, albo rozłączne albo mają jeden wspólny bóg lub jeden wspólny wierzchołek.*

Od tej pory stosując w tekście pojęcie wielokąta lub n-kąta zawsze będziemy mieli na myśli wielokąt bądź n-kąt foremny.

Definicja 1.3 *Wierzchołek parkietażu to punkt, w którym stykają się wierzchołki wielokątów tworzących dany parkietaż.*



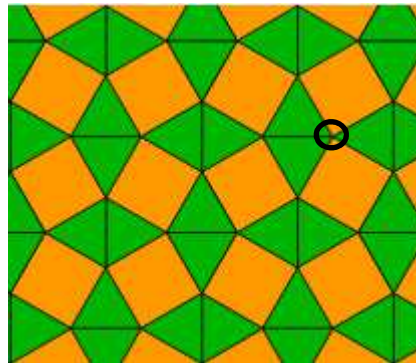
Rys.1

Aby rozróżnić, jakiego typu jest dany parkietaż używamy odpowiednich oznaczeń na jego wierzchołki. Popatrzmy na rysunek powyżej.

Widzimy, że w każdym wierzchołku styka się ten sam układ wielokątów, stąd weźmy dowolny wierzchołek. W tym wierzchołku (Rys.1) stykają się trzy trójkąty oraz dwa kwadraty. Zatem temu wierzchołkowi parkietażu przyporządkowujemy następujące oznaczenie: 3.3.3.4.4, które jest nazywane **typem wierzchołka parkietażu**. W naszym zapisie typu wierzchołka, trójka odpowiada trójkątowi, ponieważ trójkąt ma trzy boki. Analogicznie czwórka odpowiada kwadratowi, ponieważ ma on cztery boki. Oczywiście nie ma znaczenia, od którego wielokąta zaczniemy wypisywać pozostałe. Wypisane poniżej oznaczenia dla rozpatrywanego wierzchołka są równoważne i wyznaczają jeden i ten sam typ wierzchołka.

$$3.3.3.4.4 \Leftrightarrow 4.3.3.3.4 \Leftrightarrow 4.4.3.3.3 \Leftrightarrow 3.4.4.3.3 \Leftrightarrow 3.3.4.4.3$$

Ważna natomiast przy oznaczaniu typu wierzchołka parkietażu jest kolejność, w jakiej wielokąty foremne występują po sobie naokoło wierzchołka. Popatrzmy na poniższy parkietaż (Rys.2).

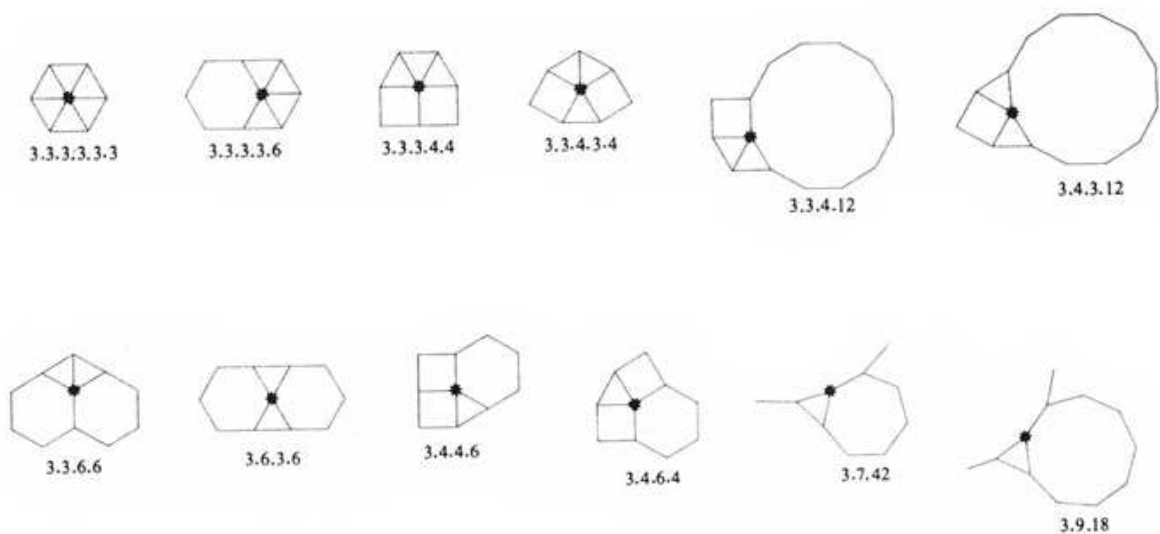


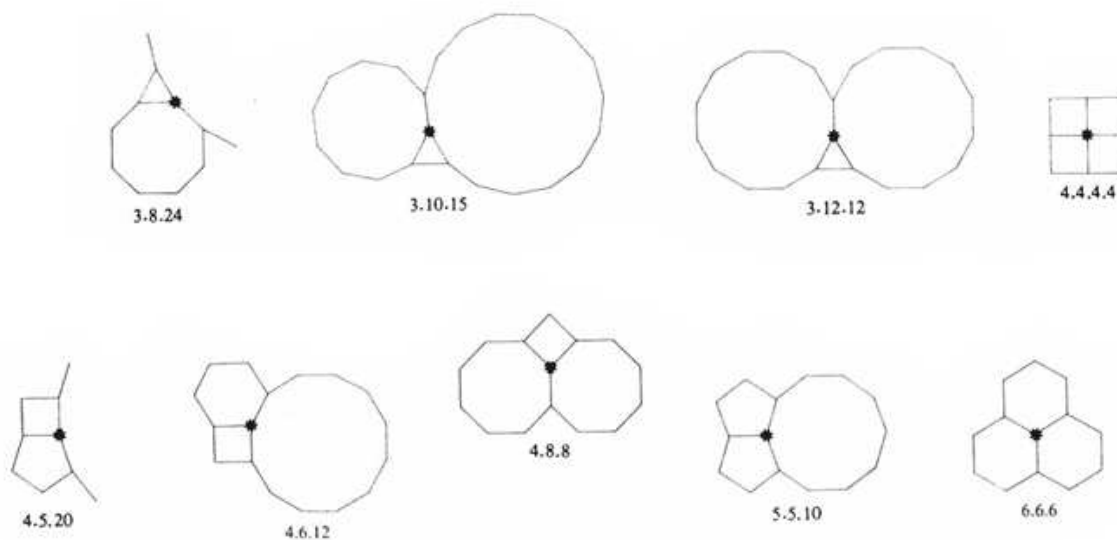
Rys.2

Tutaj również wokół wierzchołka stykają się trzy trójkąty i dwa kwadraty. Jednak kombinacja trójkątów i kwadratów wokół wierzchołka występuje w innej kolejności niż na rysunku 1 stąd typ wierzchołka na rysunku 2 jest inny niż na rysunku 1. Podsumowując, przy oznaczaniu typu wierzchołka parkietażu, zaczynając od dowolnego wielokąta, wypisujemy wszystkie wielokąty znajdujące się wokół tego wierzchołka, zgodnie z kolejnością występowania.

1.1. 21 możliwości zabudowania wierzchołka wielokątami foremnymi

Zanim zaczniemy budować parkietaże, przyjrzyjmy się, jakimi kombinacjami różnych wielokątów foremnych szczerlnie wypełnimy fragment płaszczyzny wokół jednego punktu. Takich kombinacji jest dwadzieścia jeden. Zostały one szczegółowo opisane w książce pt. „Tilings and Patterns” autorstwa B. Gruenbauma i G.C. Shepharda [1]. Lista 21 kombinacji umieszczenia wielokątów foremnych wokół wierzchołka została zamieszczona poniżej na Rys.3.





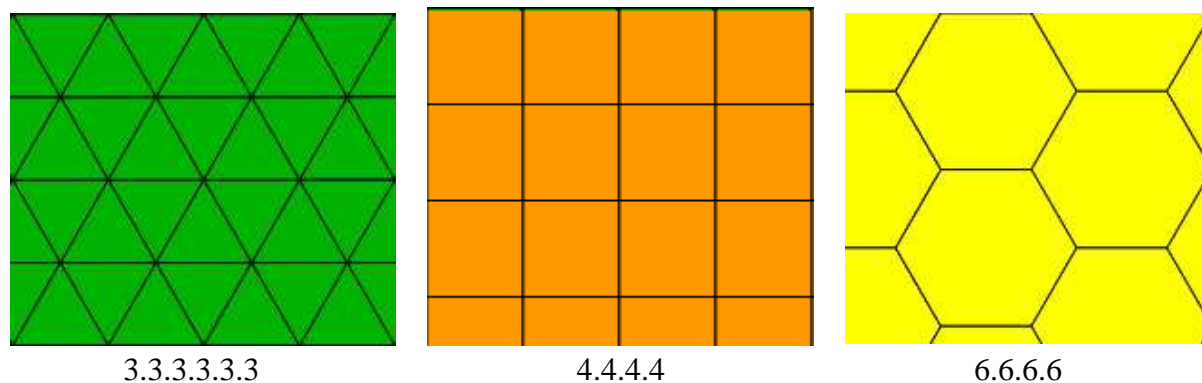
Rys. 3

1.2. Rodzaje parkietaży

W tym podrozdziale przypomnijmy sobie rodzaje parkietaży, które są dość dobrze znane i dość często opisywane w literaturze popularyzującej matematykę między innymi w książce pt. „Śladami Pitagorasa” Szczepana Jeleńskiego[2]. Są to parkietaże foremne i półforemne. Będą one wykorzystane w kolejnych rozdziałach, do budowania parkietaży 2-Archimedesowych.

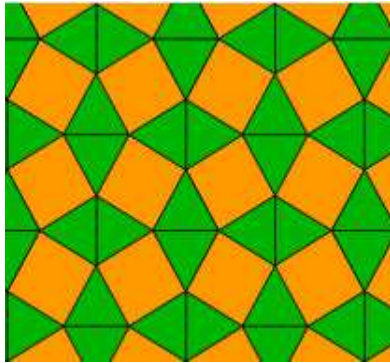
Definicja 1.2.1 *Parkietaż foremny to parkietaż składający się z takich samych wielokątów foremnych, których jednakowa liczba schodzi się w każdym wierzchołku.*

Istnieją dokładnie trzy parkietaże foremne. Jednym z nich jest parkietaż, gdzie wokół każdego wierzchołka spotyka się sześć trójkątów. W kolejnych wokół każdego wierzchołka spotykają się cztery kwadraty lub trzy sześciokąty. Ponieważ wszystkie wierzchołki parkietażu foremnego mają ten sam typ, symbolem tego typu będziemy też oznaczać cały parkietaż.

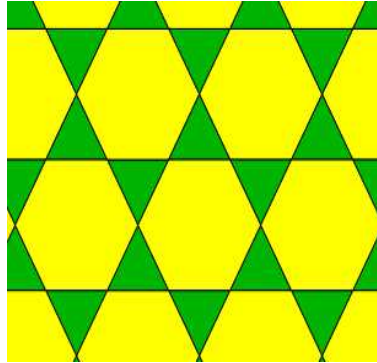


Definicja 1.2.2 *Parkietaż półforemny to parkietaż składający się z różnych wielokątów foremnych, w których wszystkie wierzchołki mają ten sam ustalony typ.*

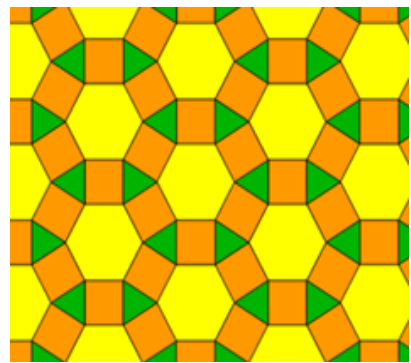
Istnieje dokładnie osiem parkietażów półforemnych. Zostały one zilustrowane poniżej. Podobnie jak w przypadku parkietażu foremnych, symbolem typu występujących wierzchołków oznaczamy też cały parkietaż.



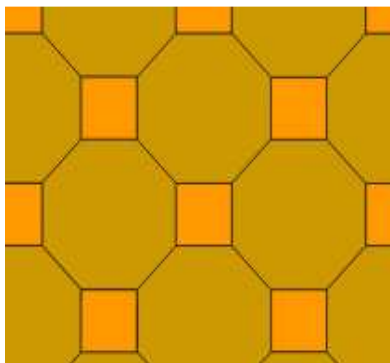
3.4.3.4.3



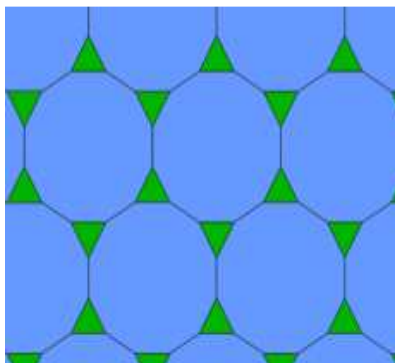
3.6.3.6



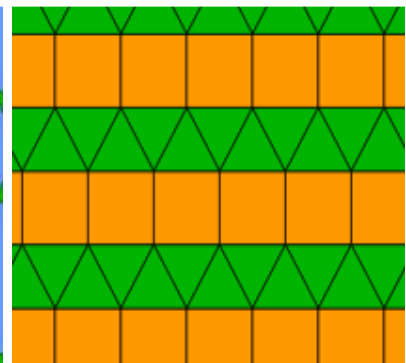
3.4.6.4



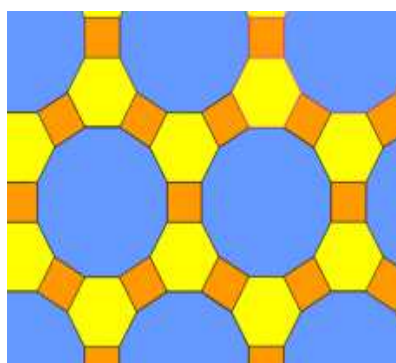
4.8.8



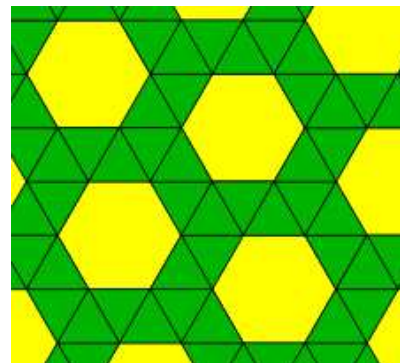
3.12.12



3.3.3.4.4



4.6.12



3.3.3.3.6

Uwaga 1.2.1. *Razem parkietáže foremne i półforemne tworzą klasę tzw. parkietażu Archimedesowych, które zgodnie z definicją posiadają wszystkie wierzchołki tego samego typu.*

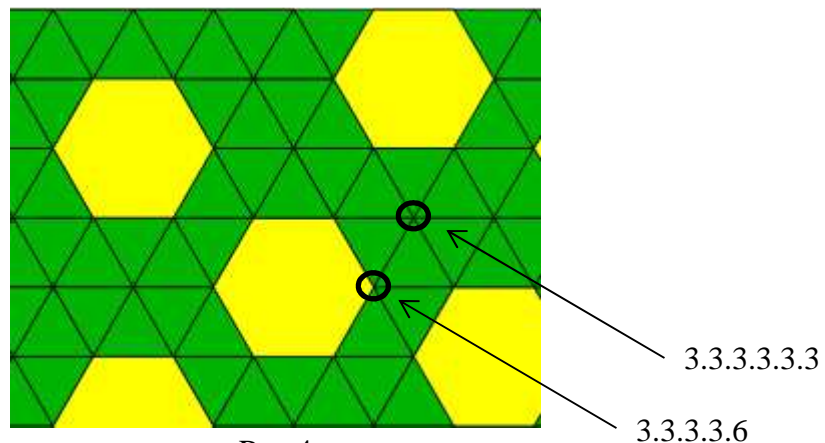
2. Parkietaże 2-Archimedesowe

W tym rozdziale wprowadzimy definicję parkietażu 2-Archimedesowego oraz jego oznaczenia.

Definicja 2.1 *Parkietaż 2-Archimedesowy to taki parkietaż, którego płytki są niejednakowymi wielokątami foremnymi oraz występują dwa i tylko dwa różne układy płytek wokół wierzchołków.*

Zauważmy, że podstawową różnicą pomiędzy parkietażem 2-Archimedesowym a parkietażem foremnym i półforemnym jest fakt, że w parkietażu 2-Archimedesowym dopuszczalne są dwa różne układy płytek wokół wierzchołków. Natomiast w przypadku parkietaży foremnych i półforemnych występował tylko jeden układ płytek wokół wszystkich wierzchołków.

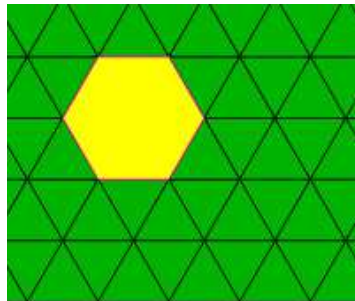
Parkietaż zaprezentowany poniżej (rys.4) jest przykładem parkietażu 2-Archimedesowego. Występują tutaj dwa rodzaje wierzchołków. W jednym spotyka się sześć trójkątów (typ 3.3.3.3.3.3) a w drugim cztery trójkąty i sześciokąt (typ 3.3.3.3.6).



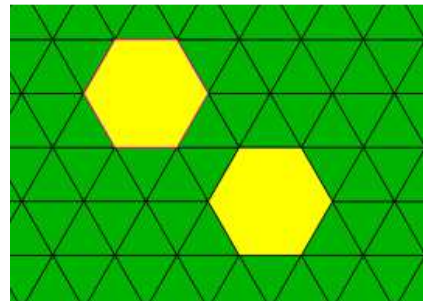
Parkietaże 2-Archimedesowe oznaczamy w analogiczny sposób do parkietaży foremnych i półforemnych. Bierzymy dowolny wierzchołek jednego typu. Następnie wybieramy dowolny wielokąt foremny i zaczynając od niego, wypisujemy wszystkie wielokąty dookoła wierzchołka, zgodnie z kolejnością występowania. Następnie znajdujemy dowolny wierzchołek drugiego typu i postępujemy analogicznie, jak poprzednio. W zapisie oddzielamy dwa różne typy wierzchołków średnikiem. Oczywiście nie ma znaczenia, od którego typu wierzchołka zaczniemy. Oba poniższe zapisy są równoważne i wyznaczają parkietaż tego samego typu.

$$(3.3.3.3.3.3 ; 3.3.3.3.6) \Leftrightarrow (3.3.3.3.6 ; 3.3.3.3.3.3)$$

Zauważmy, że zapisane powyżej oznaczenia parkietażu określa jedynie typ wierzchołków, które w nim występują. Nie mamy podanej informacji ile wierzchołków określonego typu występuje w danym parkietażu. Zatem mając powyższe oznaczenie, możemy narysować kilka bądź kilkadziesiąt różnych parkietaży, które posiadają powyższe oznaczenia. Jest to kolejna różnica pomiędzy parkietażem półforemnym i foremnym a parkietażem 2-Archimedesowym. W parkietażu półforemnym oraz foremnym dane oznaczenie wyznaczało dokładnie jeden, ten sam parkietaż. Na rysunkach 5 i 6 widzimy przykłady parkietaży 2-Archimedesowych o typie wierzchołków 3.3.3.3.3.3 i 3.3.3.3.6. Oba parkietaże są 2-Archimedesowe o tym samym typie wierzchołków. Jednak parkietaż z rysunku nr 5 ma sześć wierzchołków w typie 3.3.3.3.6 natomiast parkietaż z rysunku nr 6 ma takich wierzchołków dwanaście. Pozostałe wierzchołki obu parkietaży są w typie 3.3.3.3.3.3. Zatem widzimy, że mamy dwa różne parkietaże o tym samym typie wierzchołków.



Rys. 5



Rys.6

2.1. Budowa parkietaży 2-Archimedesowych

W tym i kolejnym podrozdziale odpowiemy na pytanie, z jakich typów wierzchołków można utworzyć parkietaż 2-Archimedesowy. W tym celu skorzystamy z listy dwudziestu jeden możliwych zabudowań fragmentu płaszczyzny wielokątami foremnymi wokół punktu (lista dostępna w rozdziale 1.1; Rys.3).

Zgodnie z definicją parkietaż 2-Archimedesowy posiada dwa i tylko dwa różne typy wierzchołków. Stąd spróbujemy połączyć kombinacje zabudowań wielokątów foremnych wokół wierzchołka w pary. Następnie sprawdzimy, czy stosując takie połączenie, możemy szczelnie zabudować płaszczyznę tylko tymi dwoma typami wierzchołków wokół każdego punktu. Gdy te warunki zostaną spełnione uzyskamy parkietaż 2-Archimedesowy. W tym podrozdziale opiszemy przypadki wykluczenia pewnych typów par. A o tym, że pozostałe pary umożliwiają zbudowanie parkietaży 2-Archimedesowych przekonamy się w kolejnym podrozdziale (Rozdział 2.2).

Punktem wyjściowym do znajdowania wszystkich typów par wierzchołków jest następująca obserwacja.

Obserwacja 2.1.1. *W 2-Archimedesowym parkietażu istnieje krawędź łącząca wierzchołki dwóch różnych typów.*

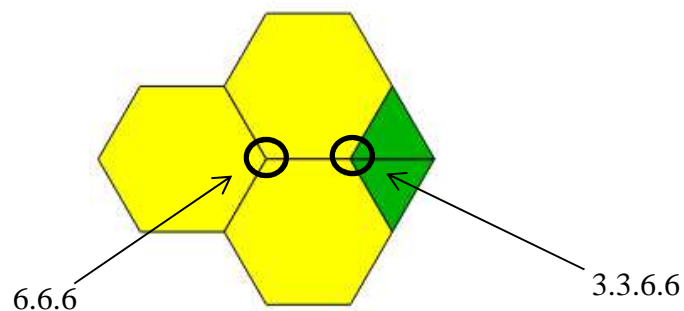
Zgodnie z definicją parkietaż 2-Archimedesowy posiada wierzchołki o dwóch różnych typach. Wiemy, że każda krawędź wielokąta w parkietażu łączy dwa wierzchołki. Stąd, jeśli parkietaż jest 2-Archimedesowy, to musi istnieć przynajmniej jedna taka krawędź, która łączy wierzchołki dwóch różnych typów.

A teraz przystąpmy do szukania typów par wierzchołków, z których można utworzyć parkietaż 2-Archimedesowy.

Przypadek 1.

Weźmy zabudowanie wokół punktu następującą kombinacją: 6.6.6. Wiemy, że dwa różne typu wierzchołków mają wspólną krawędź. Zatem w naszym przypadku szukamy na liście takiego wierzchołka, w którym obok siebie znajdują się dwa sześciokąty, wtedy dwa wierzchołki dwóch różnych typów będą miały wspólną krawędź. Widzimy, że jedyna możliwość na drugi typ wierzchołka to 3.3.6.6. Spróbujmy utworzyć z tych dwóch typów wierzchołków parkietaż 2-Archimedesowy.

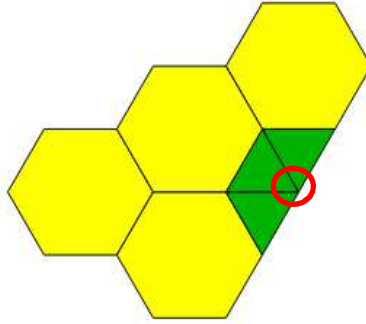
Mam wierzchołek 6.6.6, buduję wierzchołek 3.3.6.6, doklejając dwa trójkąty do dowolnej krawędzi łączącej dwa sześciokąty, jak na rysunku poniżej (Rys.7).



Rys.7

Sprawdźmy teraz, czy stosując te dwa typy wierzchołków, można szczelnie zabudować płaszczyznę wokół każdego punktu.

Weźmy wierzchołek, w którym spotyka się trójkąt z sześciokątem. Chcemy otrzymać parkietaż 2-Archimedesowy, zatem w naszym wierzchołku może być tylko następujący układ wielokątów foremnych 3.3.6.6 lub 6.6.6. Widzimy, że w wierzchołku znajduje się już trójkąt i sześciokąt, stąd opcja 6.6.6 odpada. Dokładamy, więc do wierzchołka sześciokąt oraz trójkąt, jak na rysunku poniżej (Rys.8).



Rys.8

Po takim dołożeniu wielokątów widzimy, że w wierzchołku zaznaczonym na powyższym rysunku (Rys. 8) stykają się trzy trójkąty. Stąd ten wierzchołek nie może być w typie 6.6.6 lub 3.3.6.6. Zachodzi potrzeba utworzenia nowego typu wierzchołka, co jest sprzeczne z definicją parkietażu 2-Archimedesowego.

Stąd nie istnieje parkietaż 2-Archimedesowy o powyższym typie wierzchołków (6.6.6;3.3.6.6). Co więcej, powyższe rozumowanie pokazuje, że typ wierzchołka 6.6.6 nie może pojawić się w żadnym parkietażu 2-Archimedesowym.

Przypadek 2.

Weźmy kolejny wierzchołek z listy (patrząc od jej końca). Jest to wierzchołek w typie 5.5.10. Szukamy dla niego pasującej pary tzn. takiej, w której krawędzią stykają się dwa pięciokąty lub pięciokąt i dziesięciokąt. Taka para nie istnieje, bo na liście z Rys.3 nie ma, poza typem 5.5.10, innego typu wierzchołka, w którym występowałyby dwa pięciokąty albo pięciokąt i dziesięciokąt stąd wierzchołek 5.5.10 nie może mieć wspólnej krawędzi z żadnym innym wierzchołkiem. Zatem nie istnieje parkietaż 2-Archimedesowy, którego jeden z wierzchołków jest w typie 5.5.10.

Analogiczna sytuacja dotyczy następujących wierzchołków:

1. 4.8.8
2. 3.10.15
3. 3.8.24
4. 3.9.18
5. 3.7.42

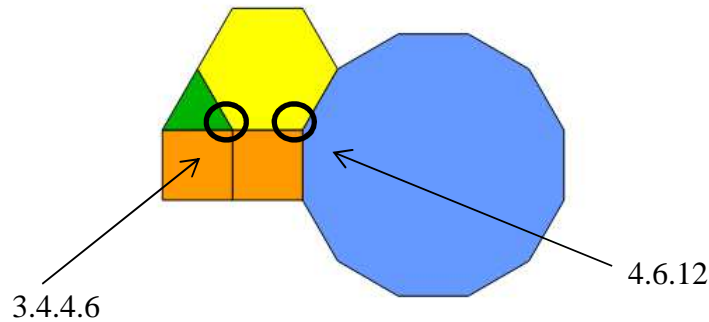
Stąd nie można utworzyć parkietażu 2-Archimedesowego, który posiada wierzchołek w typie, który znajdującym się na powyższej liście.

Przypadek 3.

Kolejny typ wierzchołka z listy to 4.6.12. Zatem szukamy pasującej pary, czyli takiej, w której kwadrat ma wspólną krawędź z sześciokątem lub sześciokąt z dwunastokątem lub dwunastokąt z kwadratem. Znajdujemy dwa pasujące typy wierzchołków: 3.4.4.6 albo 3.4.6.4.

Podprzypadek 3.A.

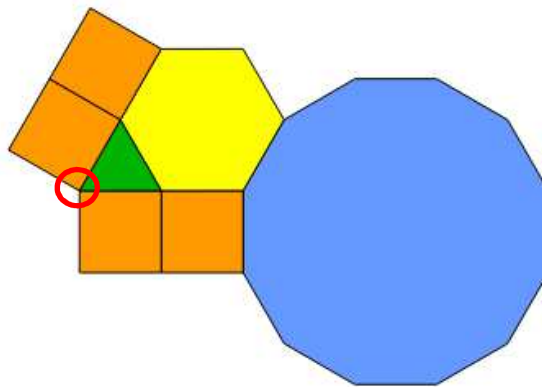
Spróbujmy najpierw utworzyć parkietaż 2-Archimedesowy z wierzchołków 4.6.12 i 3.4.4.6. Mamy wierzchołek 4.6.12, do wspólnej krawędzi (łączącej kwadrat z sześciokątem) dokładam trójkąt i kwadrat, tak, aby powstał wierzchołek w typie 3.4.4.6, jak na rysunku poniżej (Rys.9).



Rys.9

Następnie sprawdzimy, czy stosując tylko te dwa typy wierzchołków uda nam się szczelnie zabudować płaszczyznę wokół każdego punktu.

Weźmy wierzchołek, w którym styka się trójkąt i sześciokąt. Aby parkietaż pozostał 2-Archimedesowy jedyna opcja wynikająca z listy potencjalnych konfiguracji wierzchołków z Rys.3 to dołożenie wielokątów tak, aby tworzyły wierzchołek w typie 3.4.4.6, jak na rysunku poniżej (Rys.10).

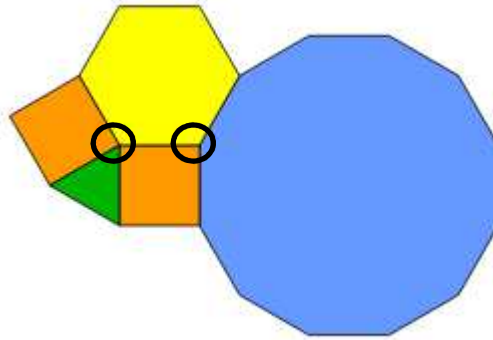


Rys.10

Po takim doklejeniu płaszczyzna jest nadal szczelnie wypełniona, ale w jednym z wierzchołków styka się kwadrat, trójkąt i kwadrat, co stwarza konieczność użycia nowego typu wierzchołka, więc uzyskujemy sprzeczność z definicją parkietażu 2-Archimedesowego. Zatem nie istnieje parkietaż 2-Archimedesowy o typie wierzchołków 4.6.12 i 3.4.4.6.

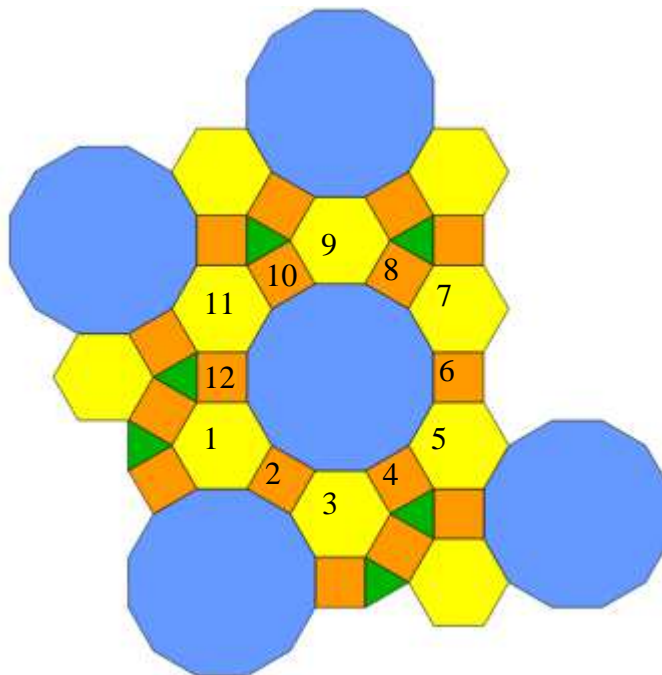
Podprzypadek 3.B.

Rozpatrzmy, więc drugą możliwość. Mamy wierzchołki w typie 4.6.12 i 3.4.6.4. Spróbujmy z nich ułożyć parkietaż 2-Archimedesowy. Wspólna krawędź to ta, która łączy kwadrat z sześciokątem, jak na rysunku znajdującym się na kolejnej stronie (Rys.11).



Rys.11

Następnie sprawdzimy, czy tymi dwoma typami wierzchołków da się szczelnie wypełnić płaszczyznę. Zatem wybierzmy dowolny wierzchołek i doklejmy do niego odpowiednie wielokąty, jak na rysunku poniżej. Kolejność doklejania wielokątów została oznaczona odpowiednimi numerkami.



Rys.12

Widzimy, że dokładając kolejne wierzchołki, parkietaż układa się w sposób poprawny. W niektórych wierzchołkach możemy dołożyć parkietaż na dwa sposoby. Na przykład w miejscu, gdzie styka się wielokąt numer 9 i 10. Tutaj wybór dowolnego typu wierzchołka nie psuje parkietażu.

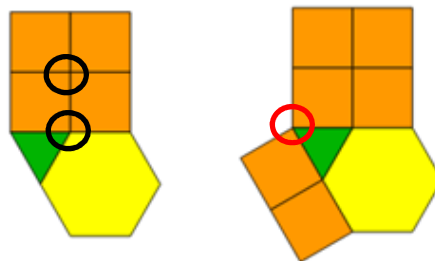
Nasuwa się, więc pytanie, czy w taki sposób możemy zabudować całą płaszczyznę. Odpowiedź poznamy w kolejnym rozdziale. Na razie zapamiętajmy, że para typów wierzchołków 4.6.12 i 3.4.6.4 nie da się w łatwy sposób wykluczyć i dlatego traktujemy ją jak prawdopodobny typ dla parkietażu 2-Archimedesowego.

Wykluczenia pozostałych konfiguracji wierzchołków z listy znajdującej się na rysunku nr 3 zostaną przeprowadzone w sposób analogiczny do powyższych trzech przypadków. Będziemy brali każdy wierzchołek z listy z rysunku nr 3, a następnie szukali na wspomnianej liście kolejnego typu wierzchołka, z którym nasz pierwotnie wybrany ma wspólną krawędź. Następnie do tej krawędzi dołożymy wierzchołek drugiego typu i sprawdzimy, czy dwoma wybranymi typami wierzchołków możemy szczelnie wypełnić płaszczyznę. Powstałe przypadki nie będą opisywane, zostaną jedynie zilustrowane w postaci rysunków, na których, kolorem czarnym będą zaznaczone wierzchołki dwóch wybranych typów. Natomiast w przypadku wykluczenia pary wierzchołków, kolorem czerwonym zostanie zaznaczony kandydat na nowy typ wierzchołka, tak jak to miało miejsce na powyższych rysunkach. Ilustracja przypadków, w których nie udało się wykluczyć konfiguracji wierzchołków, zostanie pominięta. Tymi typami wierzchołków będziemy zajmować się w kolejnym podrozdziale.

Przypadek 4. Typ 4.4.4.4

	Możliwości	Wspólna krawędź	Dodatkowa informacja
A	3.4.4.6	4.4	Kombinacja niemożliwa
B	3.3.3.4.4	4.4	Prawdopodobnie istnieje

Podprzypadek 4.A. Typy 4.4.4.4 i 3.4.4.6



Rys.13

Rysunek 13 ilustruje rozumowanie dowodzące, że nie istnieje parkietaż o typie wierzchołków 4.4.4.4 i 3.4.4.6.

Przypadek 5. Typ 3.12.12

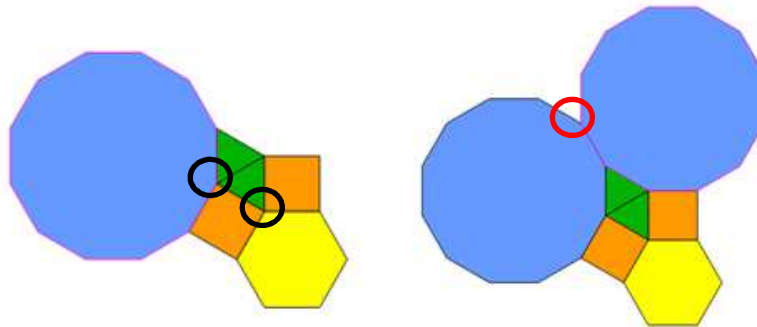
Jedyną możliwością to dołożenie typu 3.4.3.12, ponieważ wspólna krawędź to ta, przy której styka się trójkąt i dwunastokąt. Taki parkietaż prawdopodobnie istnieje.

Przypadek 6. Typ 3.4.6.4

	Możliwości	Wspólna krawędź	Dodatkowa informacja
A	3.3.3.4.4	3.4	Prawdopodobnie istnieje
B	3.3.4.3.4	3.4	Prawdopodobnie istnieje

C	3.3.4.12	3.4	Kombinacja niemożliwa
D	3.4.3.12	3.4 ; 4.3	Kombinacja niemożliwa
E	3.4.4.6	3.4 ; 4.6	Prawdopodobnie istnieje
F	4.6.12	4.6	Prawdopodobnie istnieje

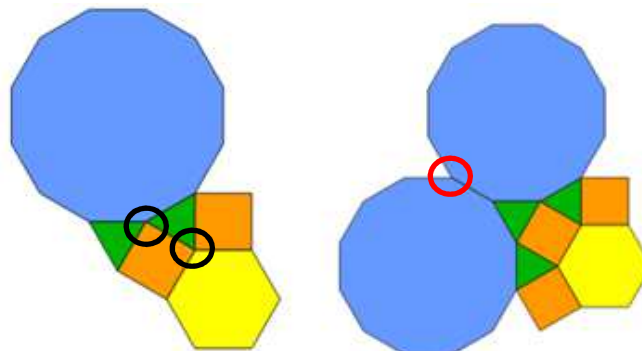
Podprzypadek 6.C. Typy 3.4.6.4 i 3.3.4.12



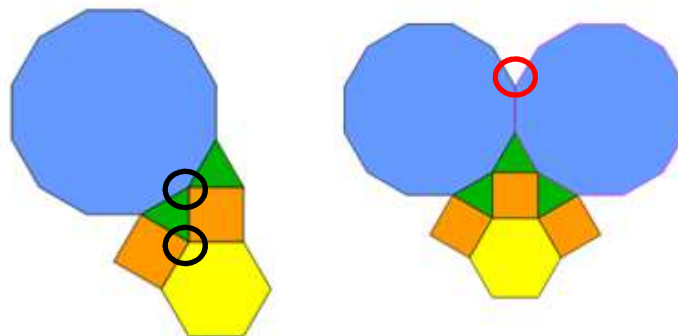
Rys.14

Nie istnieje parkietaż o typie wierzchołków 3.4.6.4 i 3.3.4.12.

Podprzypadek 6.D. Typy 3.4.6.4 i 3.4.3.12



Rys.15. Krawędź 4.3.



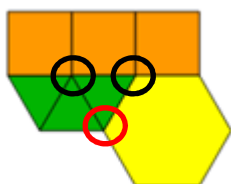
Rys.16. Krawędź 3.4.

Nie istnieje parkietaż o typie wierzchołków 3.4.6.4 i 3.4.3.12.

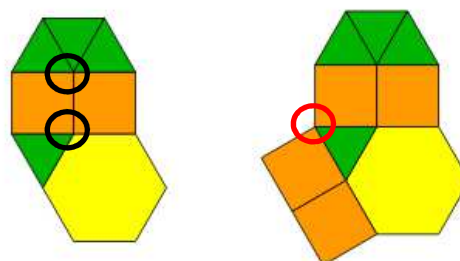
Przypadek 7. Typ 3.4.4.6

	Możliwości	Wspólna krawędź	Dodatkowa informacja
A	3.3.3.4.4	3.4 ; 4.4	Kombinacja niemożliwa
B	3.3.4.3.4	3.4	Kombinacja niemożliwa
C	3.3.4.12	3.4	Kombinacja niemożliwa
D	3.4.3.12	3.4	Kombinacja niemożliwa
E	3.4.6.4	3.4 ; 6.4	Prawdopodobnie istnieje
F	4.6.12	4.6	Podprzypadek 3.A - Kombinacja niemożliwa
G	3.3.3.3.6	6.3	Kombinacja niemożliwa
H	3.3.6.6	6.3	Kombinacja niemożliwa
I	3.6.3.6	6.3	Prawdopodobnie istnieje
J	4.4.4.4	4.4	Podprzypadek 4.A - Kombinacja niemożliwa

Podprzypadek 7.A. Typy 3.4.4.6 i 3.3.3.4.4



Rys. 16. Krawędź 3.4.

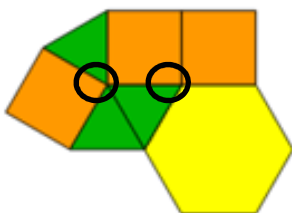


Rys.17. Krawędź 4.4.

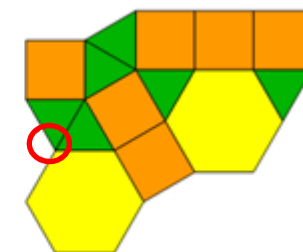
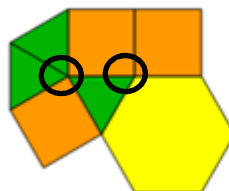
Nie istnieje parkietaż o typie wierzchołków 3.4.4.6 i 3.3.3.4.4.

Podprzypadek 7.B. Typy 3.4.4.6 i 3.3.4.3.4

Do krawędzi, w której styka się trójkąt z kwadratem, konfigurację typu 3.3.4.3.4 możemy dołożyć na dwa sposoby (Rys.18 i Rys.19). W obydwu przypadkach dochodzimy do sprzeczności. Zatem nie istnieje parkietaż 2-Archimedesowy o typie wierzchołków 3.4.4.6 i 3.3.4.3.4.

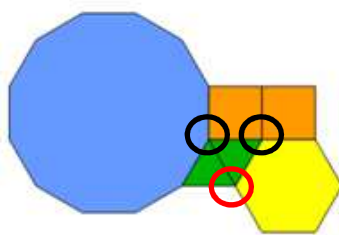


Rys.18



Rys.19

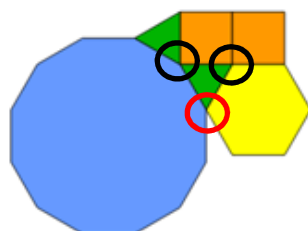
Podprzypadek 7.C. Typy 3.4.4.6 i 3.3.4.12



Rys.20

Nie istnieje parkietaż o typie wierzchołków 3.4.4.6 i 3.3.4.12.

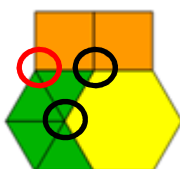
Podprzypadek 7.D. Typy 3.4.4.6 i 3.4.3.12



Rys.21

Nie istnieje parkietaż o typie wierzchołków 3.4.4.6 i 3.4.3.12.

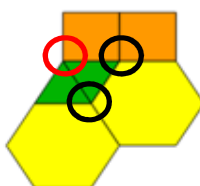
Podprzypadek 7.G. Typy 3.4.4.6 i 3.3.3.3.4



Rys.22

Nie istnieje parkietaż o typie wierzchołków 3.4.4.6 i 3.3.3.3.6.

Podprzypadek 7.H. Typy 3.4.4.6 i 3.3.6.6



Rys.23

Nie istnieje parkietaż o typie wierzchołków 3.4.4.6 i 3.3.6.6.

Przypadek 8. Typ 3.6.3.6

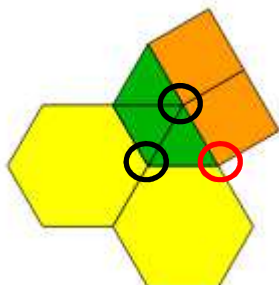
	Możliwości	Wspólna krawędź	Dodatkowa informacja
A	3.3.3.3.6	3.6	Prawdopodobnie istnieje
B	3.3.6.6	3.6	Prawdopodobnie istnieje
C	3.4.4.6	6.3	Prawdopodobnie istnieje

Przypadek 9. Typ 3.3.6.6

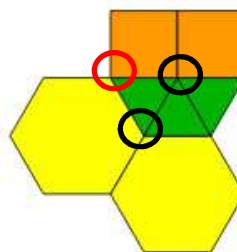
	Możliwości	Wspólna krawędź	Dodatkowa informacja
A	3.3.3.3.3.3	3.3	Prawdopodobnie istnieje
B	3.3.3.3.6	3.3 ; 3.6	Prawdopodobnie istnieje
C	3.3.3.4.4	3.3	Kombinacja niemożliwa
D	3.3.4.3.4	3.3	Kombinacja niemożliwa
E	3.3.4.12	3.3	Kombinacja niemożliwa
F	6.6.6	6.6	Przypadek 1 - Kombinacja niemożliwa
G	3.6.3.6	3.6	Prawdopodobnie istnieje

Podprzypadek 9.C. Typy 3.3.6.6 i 3.3.3.4.4

Do krawędzi 3.3. parkietów 3.3.3.4.4 możemy dołożyć na dwa sposoby (Rys.24 i Rys.25). W obydwu przypadkach dochodzimy do sprzeczności. Stąd nie istnieje parkietów o typie wierzchołków 3.3.6.6 i 3.3.4.3.4.

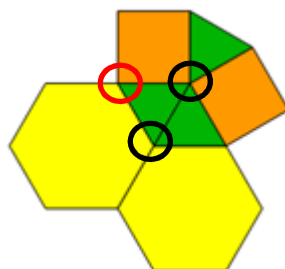


Rys.24



Rys.25

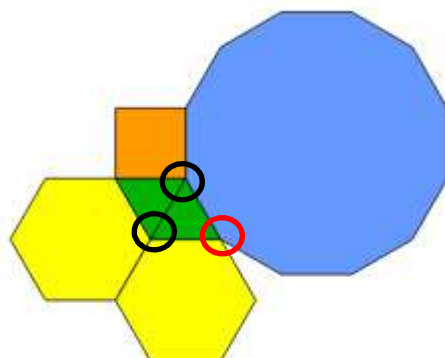
Podprzypadek 9.D. Typy 3.3.6.6 i 3.3.4.3.4



Rys.26

Nie istnieje parkietów o typie wierzchołków 3.3.6.6 i 3.3.4.3.4.

Podprzypadek 9.E. Typy 3.3.6.6 i 3.3.4.12



Rys.27

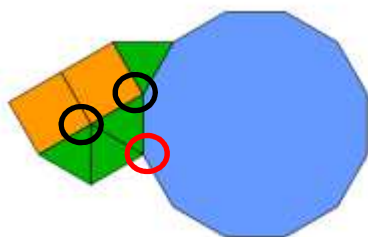
Nie istnieje parkietaż o typie wierzchołków 3.3.6.6 i 3.3.4.12.

Przypadek 10. Typ 3.4.3.12

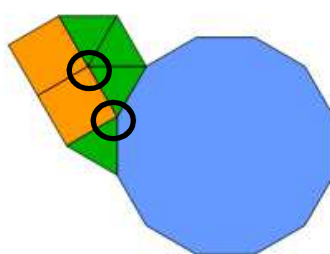
	Możliwości	Wspólna krawędź	Dodatkowa informacja
A	3.3.3.4.4	3.4 ; 4.3	Kombinacja niemożliwa
B	3.3.4.3.4	3.4 ; 4.3	Kombinacja niemożliwa
C	3.3.4.12	3.4 ; 3.12	Kombinacja niemożliwa
D	3.4.6.4	3.4	Podprzypadek 7.D - Kombinacja niemożliwa
E	3.12.12	3.12	Prawdopodobnie istnieje

Podprzypadek 10.A. Typy 3.4.3.12 i 3.3.3.4.4

Mogę dołożyć wierzchołek 3.3.3.4.4 do krawędzi 3.4 (Rys.28) lub 4.3 (Rys.29). W obydwu przypadkach dochodzimy do sprzeczności. Zatem nie istnieje parkietaż o typach wierzchołków 3.4.3.12 i 3.3.3.4.4



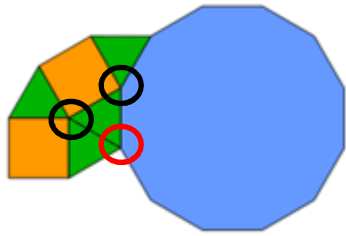
Rys.28. Krawędź 3.4.



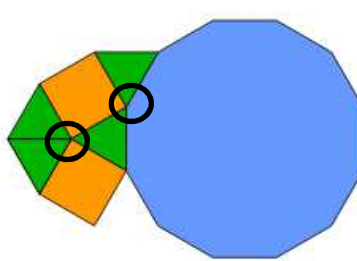
Rys.29. Krawędź 4.3.

Podprzypadek 10.B. Typy 3.4.3.12 i 3.3.4.3.4

Mogę dołożyć wierzchołek 3.3.4.3.4 do krawędzi 3.4 na dwa sposoby. Pierwszy sposób (Rys.30), drugi (Rys.31). W obu przypadkach dochodzimy do sprzeczności. Stąd nie istnieje parkietaż o typie wierzchołków 3.4.3.12 i 3.3.4.3.4.



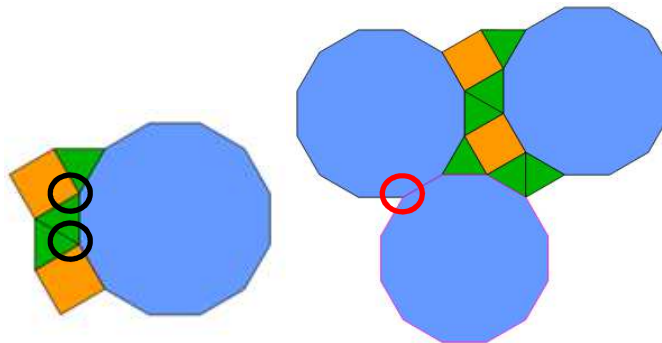
Rys.30



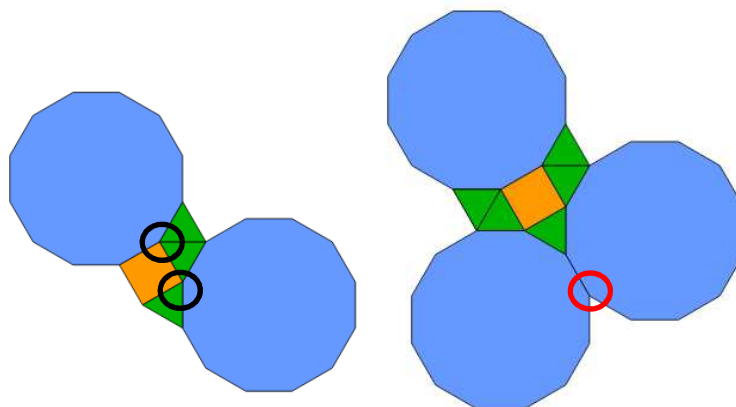
Rys.31

Podprzypadek 10.C. Typy 3.4.3.12 i 3.3.4.12

Mogę dołożyć wierzchołek 3.3.4.12 do krawędzi 3.12 (Rys. 32), do krawędzi 3.4 (Rys.33) lub krawędzi 4.3 ale wtedy będziemy mieli analogiczną sytuację, jak na rys.33. We wszystkich sytuacjach dochodzimy do sprzeczności. Zatem nie istnieje parkietaż o typach wierzchołków 3.4.3.12 i 3.3.4.12.



Rys.32. Krawędź 3.12.



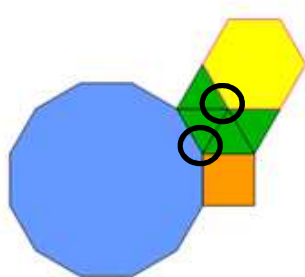
Rys.33. Krawędź 3.4.

Przypadek 11. Typ 3.3.4.12

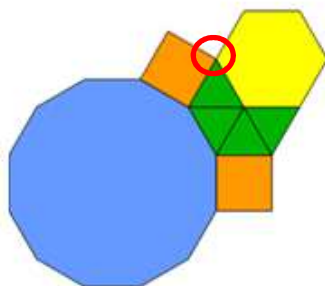
	Możliwości	Wspólna krawędź	Dodatkowa informacja
A	3.3.3.3.3.3	3.3	Prawdopodobnie istnieje
B	3.3.3.3.6	3.3	Kombinacja niemożliwa
C	3.3.3.4.4	3.3 ; 3.4	Kombinacja niemożliwa
D	3.3.4.3.4	3.3 ; 3.4	Kombinacja niemożliwa
E	3.3.6.6	3.3	Podprzypadek 9.E - Kombinacja niemożliwa
F	3.4.4.6	3.4	Podprzypadek 7.C - Kombinacja niemożliwa
G	3.4.6.4	3.4	Podprzypadek 6.C - Kombinacja niemożliwa
H	3.4.3.12	3.4	Podprzypadek 10.C - Kombinacja niemożliwa

Podprzypadek 11.B. Typy 3.3.4.12 i 3.3.3.3.6

Do krawędzi 3.3 mogą dołożyć parkietów 3.3.3.3.6 na dwa sposoby (Rys.34. i Rys.35).



Rys.34

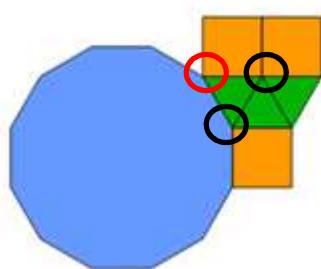


Rys.35

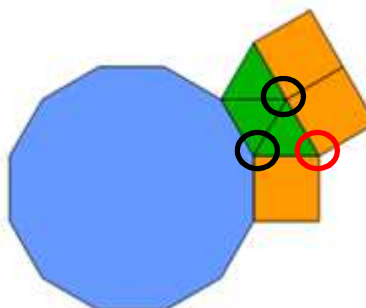
Nie istnieje parkietów o typie wierzchołków 3.3.4.12 i 3.3.3.3.6.

Podprzypadek 11.C. Typy 3.3.4.12 i 3.3.3.4.4

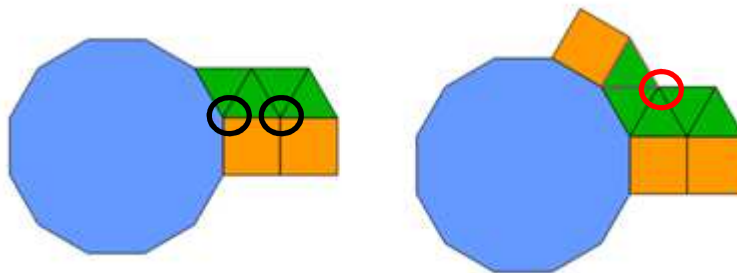
Do krawędzi 3.3 mogą dołożyć wierzchołek 3.3.3.4.4 na dwa sposoby (Rys.36 i Rys.37) oraz na jeden sposób do krawędzi 3.4 (Rys.38). We wszystkich trzech przypadkach dochodzimy do sprzeczności. Stąd nie istnieje parkietów o typie wierzchołków 3.3.4.12 i 3.3.3.4.4.



Rys.36. Krawędź 3.3.



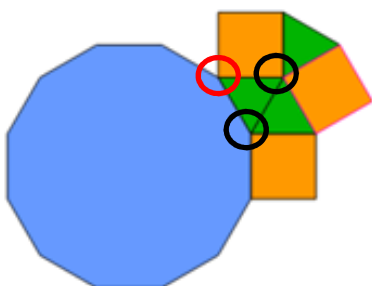
Rys. 37. Krawędź 3.3.



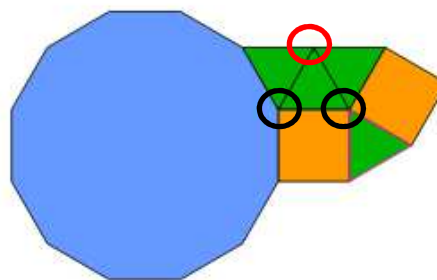
Rys.38. Krawędź 3.4.

Podprzypadek 11.D. Typy 3.3.4.12 i 3.3.4.3.4

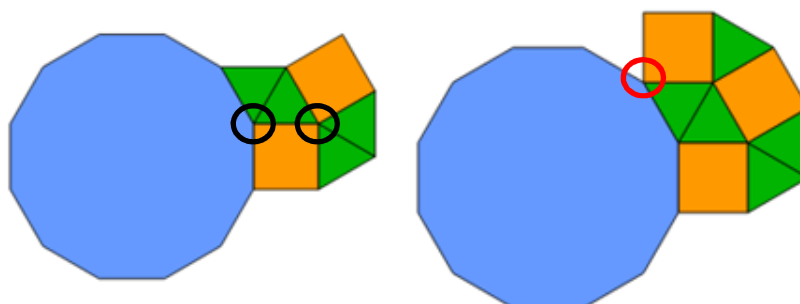
Do krawędzi 3.4 mogą dołożyć wierzchołek 3.3.4.3.4 na dwa sposoby (Rys.40 i Rys.41) oraz do krawędzi 3.3 w jeden sposób (Rys.39). We wszystkich trzech przypadkach dochodzimy do sprzeczności. Stąd nie istnieje parkietaż o typie wierzchołków 3.3.4.12 i 3.3.4.3.4.



Rys.39. Krawędź 3.3.



Rys.40. Krawędź 3.4.



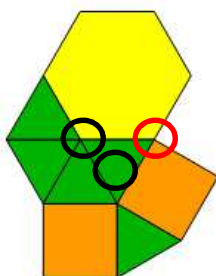
Rys.41. Krawędź 3.4.

Przypadek 12. Typ 3.3.4.3.4

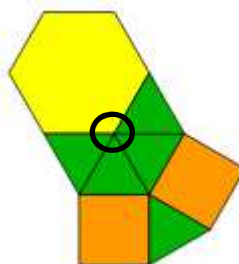
	Możliwości	Wspólna krawędź	Dodatkowa informacja
A	3.3.3.3.3.3	3.3	Prawdopodobnie istnieje
B	3.3.3.3.6	3.3	Kombinacja niemożliwa
C	3.3.3.4.4	3.3 ; 3.4 ; 4.3	Prawdopodobnie istnieje
D	3.3.4.12	3.3 ; 3.4	Podprzypadek 11.D - Kombinacja niemożliwa
E	3.3.6.6	3.3	Podprzypadek 9.D - Kombinacja niemożliwa
F	3.4.3.12	3.4 ; 4.3	Podprzypadek 10.B - Kombinacja niemożliwa
G	3.4.4.6	3.4	Podprzypadek 7.B - Kombinacja niemożliwa
H	3.4.6.4	3.4	Prawdopodobnie istnieje

Podprzypadek 12.B. Typy 3.3.4.3.4 i 3.3.3.3.6

Do krawędzi 3.3. wierzchołek 3.3.3.3.6 możemy dołożyć na dwa sposoby (Rys.42 i Rys.43). W obu przypadkach dochodzimy do sprzeczności. Stąd nie istnieje parkietaż o typie wierzchołków 3.3.4.3.4 i 3.3.3.3.6.



Rys. 42



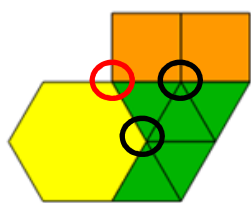
Rys. 43

Przypadek 13. Typ 3.3.3.4.4

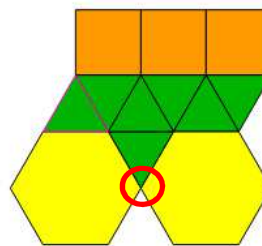
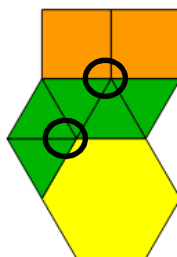
	Możliwości	Wspólna krawędź	Dodatkowa informacja
A	3.3.3.3.3.3	3.3	Prawdopodobnie istnieje
B	3.3.3.3.6	3.3	Kombinacja niemożliwa
C	3.3.4.3.4	3.3 ; 3.4 ; 4.3	Prawdopodobnie istnieje
D	3.3.4.12	3.3 ; 3.4	Kombinacja niemożliwa
E	3.3.6.6	3.3	Kombinacja niemożliwa
F	3.4.3.12	3.4 ; 4.3	Kombinacja niemożliwa
G	3.4.4.6	3.4	Kombinacja niemożliwa
H	3.4.6.4	3.4	Prawdopodobnie istnieje
I	4.4.4.4	4.4	Prawdopodobnie istnieje

Podprzypadek 13.B. Typy 3.3.3.4.4 i 3.3.3.3.6

Wierzchołek 3.3.3.3.6 do krawędzi 3.3 mogą dodać na dwa sposoby (Rys.44 i Rys.45). W obu przypadkach dochodzimy do sprzeczności, co oznacza, że nie istnieje parkietaż o typie wierzchołków 3.3.3.4.4 i 3.3.3.3.6.



Rys.44



Rys. 45

Przypadek 14. Typ 3.3.3.3.6

	Możliwości	Wspólna krawędź	Dodatkowa informacja
A	3.3.3.3.3.3	3.3	Prawdopodobnie istnieje
B	3.3.3.4.4	3.3	Podprzypadek 13.B - Kombinacja niemożliwa
C	3.3.4.3.4	3.3	Podprzypadek 12.B - Kombinacja niemożliwa
D	3.3.4.12	3.3	Podprzypadek 11B - Kombinacja niemożliwa
E	3.3.6.6	3.3; 3.6; 6.3	Prawdopodobnie istnieje
F	3.6.3.6	3.4	Prawdopodobnie istnieje
G	3.4.4.6	3.4	Podprzypadek 7.G - Kombinacja niemożliwa

Przypadek 15. Typ 3.3.3.3.3.3

	Możliwości	Wspólna krawędź	Dodatkowa informacja
A	3.3.3.3.6	3.3	Prawdopodobnie istnieje
B	3.3.3.4.4	3.3	Prawdopodobnie istnieje
C	3.3.4.3.4	3.3	Prawdopodobnie istnieje
D	3.3.4.12	3.3	Prawdopodobnie istnieje
E	3.3.6.6	3.3	Prawdopodobnie istnieje

Podsumowując rozpatrzyliśmy wszystkie kombinacje par wierzchołków z listy z rysunku 3 w Podrozdziale 1.1.

2.2. Klasyfikacja parkietaży 2-Archimedesowych

W tym podrozdziale zajmiemy się parami typów wierzchołków, których nie udało nam się wykluczyć w poprzednim podrozdziale. Jest to następujących szesnaście par wierzchołków:

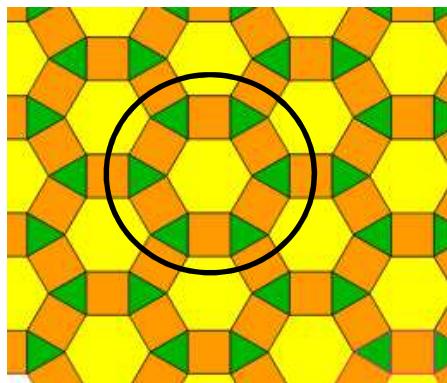
(3.4.6.4 ; 4.6.12), (3.4.6.4 ; 3.4.4.6), (3.4.6.4 ; 3.4.4.6), (3.4.6.4 ; 3.3.3.4.4),
 (3.3.3.3.3.3 ; 3.3.3.3.6), (3.3.3.4.4 ; 3.3.3.3.3.3), (3.3.3.4.4 ; 4.4.4.4),
 (3.3.3.4.4 ; 3.3.4.3.4), (3.6.3.6 ; 3.3.6.6), (3.6.3.6 ; 3.3.3.3.6) , (3.12.12 ; 3.4.3.12),
 (3.3.4.3.4 ; 3.4.6.4), (3.3.4.3.4 ; 3.3.3.4.4); (3.3.3.3.3.3 ; 3.3.4.12), (3.3.3.3.3.3 ; 3.3.6.6),
 (3.3.6.6 ; 3.3.3.3.6).

Będziemy chcieli pokazać, że wszystkimi powyższymi parami dwóch typów wierzchołków potrafimy szczelnie zapełnić całą płaszczyznę. A dokładniej, że tworzą one parkietaż 2-Archimedesowy. W tym celu będziemy korzystali z parkietaży dostępnych w rozdziale 1.3. Poprzez modyfikację istniejących parkietaży Archimedesowych będziemy tworzyli parkietaże 2-Archimedesowe.

A więc przystąpmy do pokazania, że z powyższych typów wierzchołków można utworzyć parkietaż 2-Archimedesowy.

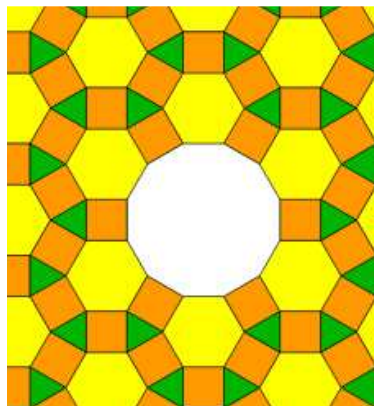
Przykład 1.

Wiemy, że istnieje parkietaż o typie wierzchołka 3.4.6.4 i jest on parkietażem półforemny tzn., że wszystkie jego wierzchołki są tego samego typu. Zilustrowano go poniżej (Rys.46).



Rys.46

Zaznaczono na nim pewien obszar. Spróbujmy wyciąć zaznaczony obszar wzdłuż krawędzi wielokątów foremnych. Powstanie nam dziura, jak na rysunku poniżej (Rys.47)

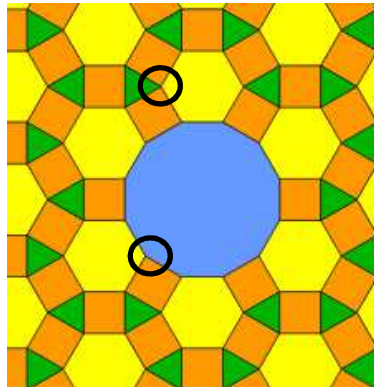


Rys.47

Zastanówmy się, jaki wielokąt lub układ wielokątów możemy wstawić w miejsce dziury, aby powstał nam parkietaż 2-Archimedesowy.

Podprzypadek 1.A.

Spróbujmy w miejsce dziury wstawić dwunastokąt, jak na rysunku poniżej (Rys.48)

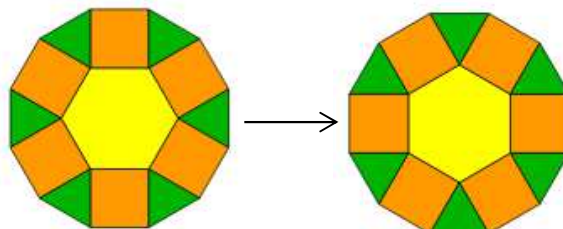


Rys.48

Widzimy, że powstał nam parkietaż 2-Archimedeosowy o typie wierzchołków 4.6.12 i 3.4.6.4, poprzez wycięcie z gotowego parkietażu pewnego fragmentu i zastąpienie go innym. Stąd powyższe wierzchołki wypełniają całą przestrzeń tworząc parkietaż 2-Archimedesowy.

Podprzypadek 1.B.

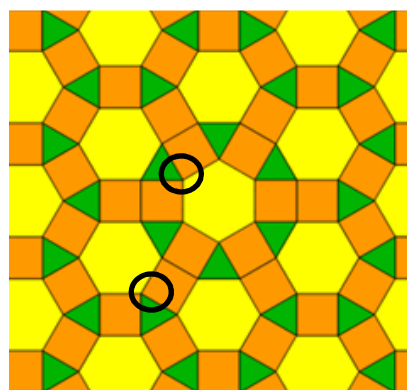
Przyjrzyjmy się wyciętemu fragmentowi parkietażu 3.4.6.4 z rysunku nr 47. Spróbujmy obrócić go o kąt $\frac{\pi}{6}$, jak na rysunku poniżej (Rys.50).



Rys. 49

Rys.50

Wstawmy tak obrócony fragment do wyjściowego parkietażu (Rys.51).

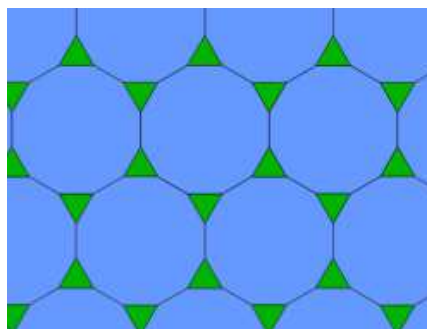


Rys. 51

Widzimy, że w ten sposób powstał nam parkietaż 2-Archimedesowy o typach wierzchołków 3.4.6.4 i 3.4.4.6.

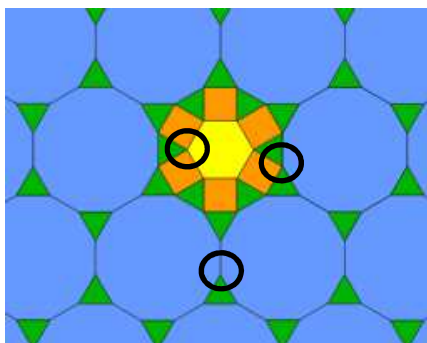
Przykład 2.

Weźmy parkietaż półforemny 3.12.12 (Rys.52)



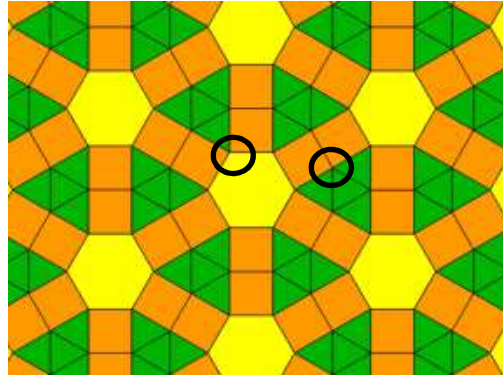
Rys.52

W przypadku 1A. Zastępowaliśmy sekwencje z rysunku nr 49 dwunastokątem foremny. Spróbujmy tutaj zrobić to samo, ale w odwrotny sposób tzn. zastąpmy dwunastokąt fragmentem wyciętych wielokątów z rysunku nr 49. Zostało to zilustrowane na poniższym rysunku. (Rys.53)



Rys. 53

Widzimy, że powstał parkietaż o trzech typach wierzchołków (3.12.12 ; 3.4.6.4 ; 3.4.3.12) a taki parkietaż zgodnie z definicją nie jest 2-Archimedesowy. Zatem spróbujmy dalej modyfikować ten parkietaż tak, aby zostały tylko dwa typy wierzchołków. W tym celu zastąpmy wszystkie dwunastokąty fragmentami wielokątów z rysunku nr 49 tak jak na rysunku znajdującym się na kolejnej stronie (Rys.54).

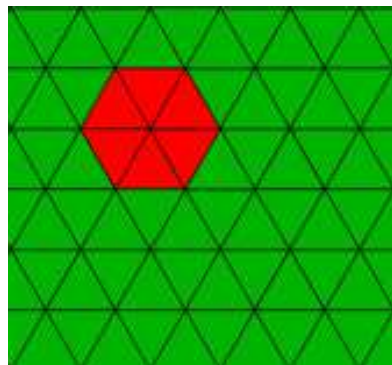


Rys.54

Widzimy, że dzięki takiej modyfikacji powstał parkietaż 2-Archimedesowy o typie wierzchołków 3.4.6.4 i 3.3.3.4.4.

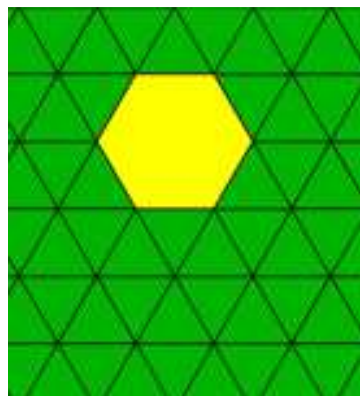
Przykład 3.

Pokażmy, że istnieje parkietaż 2-Archimedesowy o typie wierzchołków 3.3.3.3.3 i 3.3.3.3.6. Dowód będzie przebiegał bardzo podobnie jak w przykładzie nr 1. Weźmy parkietaż foremny o typie wierzchołków 3.3.3.3.3, czyli składający się z samych trójkątów. Wiemy, że sześć trójkątów odpowiednio ułożonych tworzy sześciokąt, tak jak pokazano na poniższym rysunku (Rys.55).



Rys.55

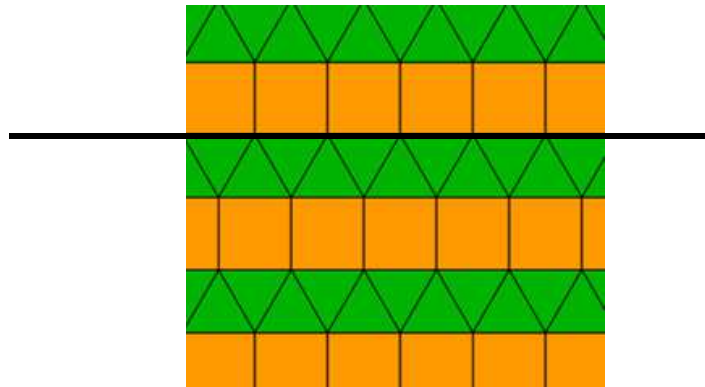
Zastąpmy, więc zaznaczone trójkąty sześciokątem. Widzimy, że w ten sposób powstał parkietaż 2-Archimedesowy o typie wierzchołków 3.3.3.3.3 i 3.3.3.3.6 (Rys.56).



Rys.56

Przykład 4.

Rozważmy parkietaż półforemny o typie 3.3.3.4.4 zilustrowany na rysunku 57.



Rys.57

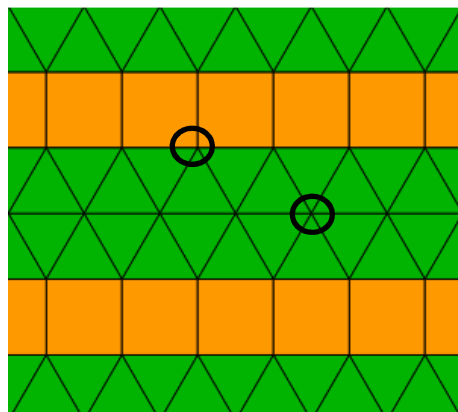
Spróbujmy rozciąć powyższy parkietaż wzdłuż czarnej linii. A następnie rozsunąć i wstawić w wolne miejsce nowy rząd wielokątów foremnych. Zastanówmy się, jakie to mogą być wielokąty, aby utworzyły parkietaż 2-Archimedesowy?

Podprzypadek 4.A.

Spróbujmy w rozcięte miejsce wstawić poniższy rząd trójkątów z rysunku 58, a następnie zsunąć parkietaż (Rys.59).



Rys.58



Rys.59

Widzimy, że powstał nowy parkietaż o typie wierzchołków 3.3.3.4.4 i 3.3.3.3.3.3, który jest parkietażem 2-Archimedesowym. Widzimy, że da się powyższymi typami wierzchołków zapełnić całą przestrzeń, ponieważ do gotowego parkietażu, wstawiliśmy fragment innego.

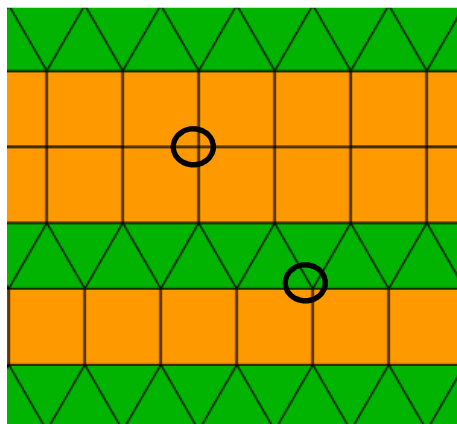
Podprzypadek 4.B.

Spróbujmy w rozcięte miejsce (Rys.57) wstawić inny rząd wielokątów. Niech to będzie rząd kwadratów, jak na poniższym rysunku (Rys.60).



Rys.60

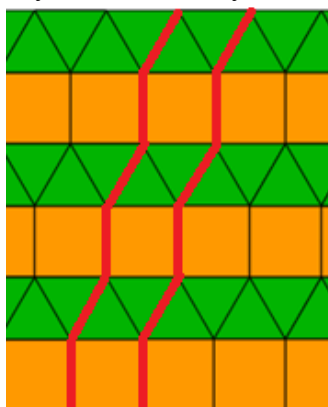
Rozsuńmy parkietaż półforemny o długość boku kwadratu i wstawmy do niego powyższy rząd kwadratów jak na rysunku nr.61. Widzimy, że analogicznie jak w podprzypadku 4.A powstał parkietaż 2-Archimedesowy o typie wierzchołków 3.3.3.4.4 i 4.4.4.4 (Rys.61).



Rys.61

Podprzypadek 4.C.

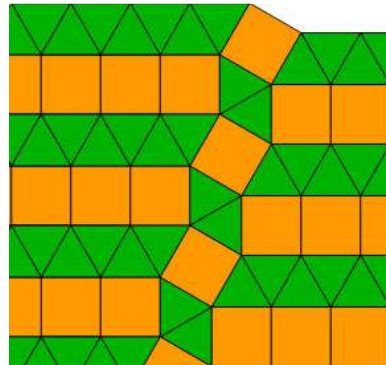
Spróbujmy parkietaż z rysunku nr 57 rozciąć w inny sposób. Wytnijmy z niego fragment pomiędzy dwoma czerwonymi liniami. (Rys.62)



Rys. 62

Spróbujmy teraz zmodyfikować wycięty fragment. Najpierw rozetnijmy go na wielokąty. Chcemy, aby po rozcięciu pozostały kwadraty i dwa trójkąty, które są połączone krawędzią. A następnie obróćmy powstałe figury o kąt $\frac{\pi}{3}$. Dołączmy tak obrócone figury do

lewej strony parkietu tzn. tak, aby kwadraty miały wspólną krawędź z trójkątami istniejącego parkietu. A pozostałe figury analogicznie do kwadratów istniejącego parkietu. Następnie prawą stronę parkietu przesunąć w dół, tak, aby kwadraty miały wspólną krawędź z trójkątami a trójkąty z kwadratami (Rys.63).

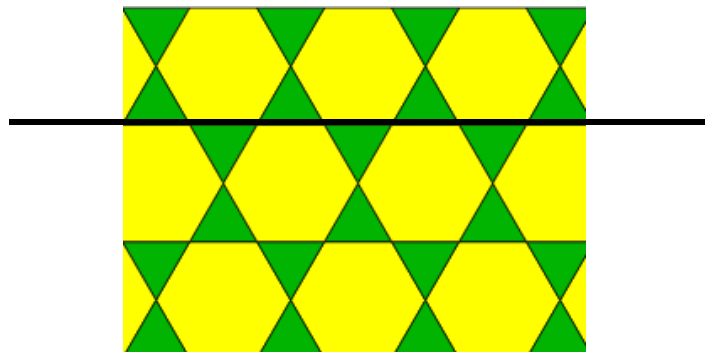


Rys. 63

Widzimy, że powstał parkiet 2-Archimedesowy o typach wierzchołków 3.3.3.4.4 i 3.3.4.3.4.

Przykład 5.

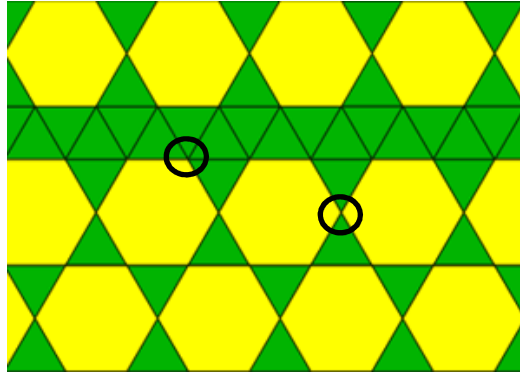
Rozważmy parkiet półforemny o typie 3.6.3.6. Rozetnijmy go wzdłuż zaznaczonej czarnej linii (Rys.64), rozsuńmy i podobnie, jak w podprzypadku 3.A i 3.B sprawdźmy, jaki rząd wielokątów możemy wstawić do parkietu, aby powstał parkiet 2-Archimedesowy.



Rys. 64

Podprzypadek 5.A

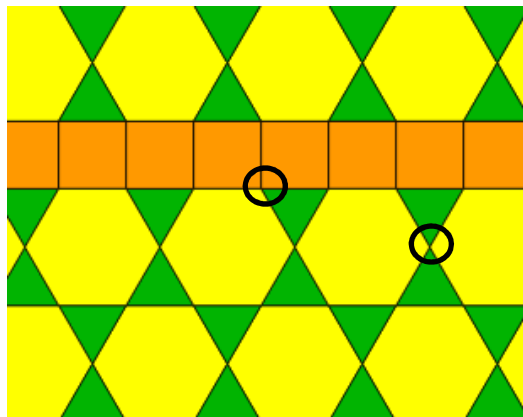
Gdy rozsunie się parkiet o długość wysokości trójkąta i wstawimy w wolną przestrzeń rząd trójkątów (Rys.58) to powstanie parkiet 2-Archimedesowy o typie wierzchołków 3.6.3.6 i 3.3.3.3.6, jak na rysunku znajdującym się na kolejnej stronie (Rys.65).



Rys. 65

Podzypadek 5.B

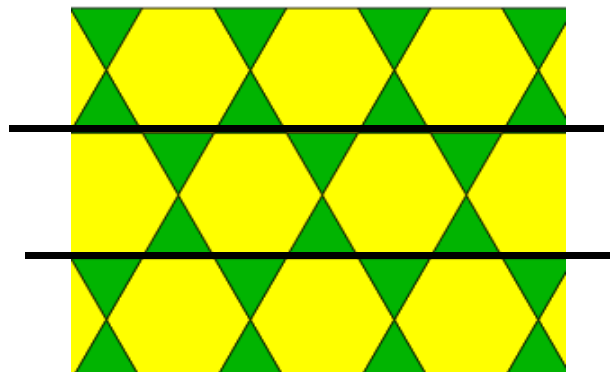
Gdy rozsuniemy parkietaż o długość boku kwadratu i wstawimy w wolną przestrzeń rząd kwadratów (Rys.60) to powstanie parkietaż 2-Archimedesowy o typie wierzchołków 3.6.3.6 i 4.4.4.4, jak na poniższym rysunku (Rys.66).



Rys.66

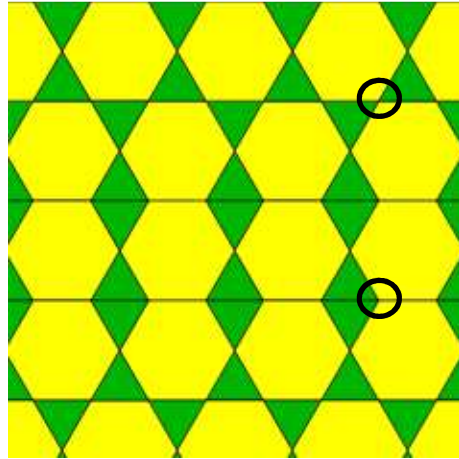
Podzypadek 5.C

Popatrzmy teraz na obszar pomiędzy dwiema czarnymi liniami z poniższego rysunku (Rys.67).



Rys.67

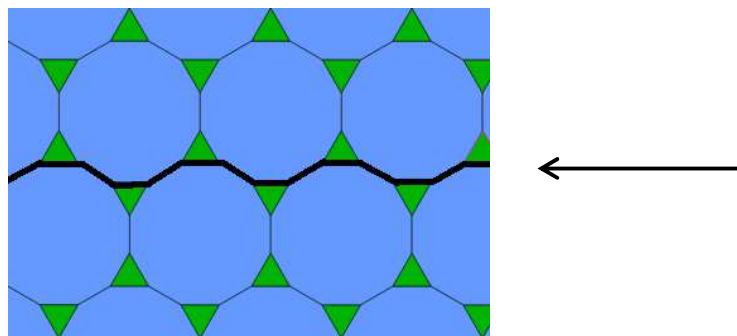
Przesuńmy zaznaczony obszar w prawo bądź lewo o długość boku wielokąta. Tak, aby trójkąt miał wspólny bok z trójkątem a sześciokąt z sześciokątem. Widzimy, że powstał nam parkietaż 2-Archimedesowy o typie wierzchołków 3.6.3.6 i 3.3.6.6 (Rys. 68), poprzez przesunięcie w bok fragmentu parkietażu 3.6.3.6.



Rys. 68

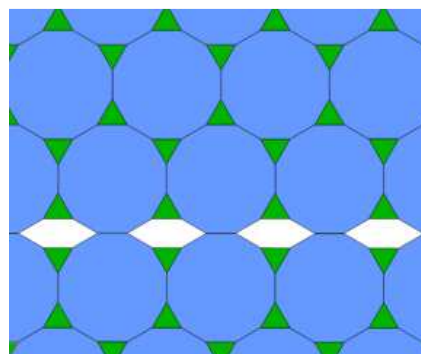
Przykład 6.

Weźmy parkietaż półforemny o typie wierzchołka 3.12.12. Rozetnijmy go wzdłuż zaznaczonej na poniższym rysunku czarnej linii (Rys.69).



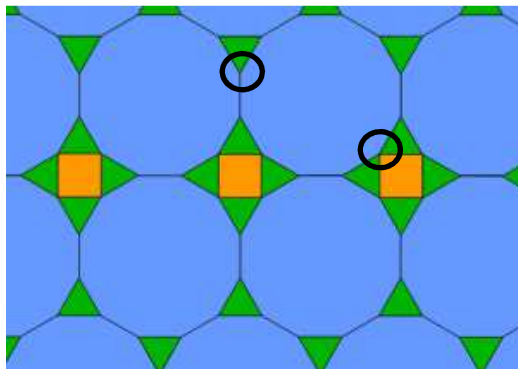
Rys. 69

A następnie dolną część parkietażu przesunąć w dół i w bok tak, aby dwa dwunastokąty miały wspólną krawędź (Rys.70).



Rys. 70

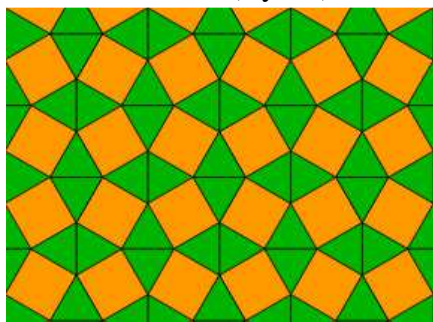
Puste miejsca w parkietażu zapełnijmy wielokątami w następującej kolejności: trójkąt, kwadrat, trójkąt. (Rys.71) Widzimy, że poprzez przesunięcie fragmentu parkietażu foremnego 3.12.12 oraz wstawienie nowej sekwencji wielokątów w puste miejsca, powstał parkietaż 2-Archimedesowy o typie wierzchołków 3.12.12 i 3.4.3.12 (Rys.71).



Rys. 71

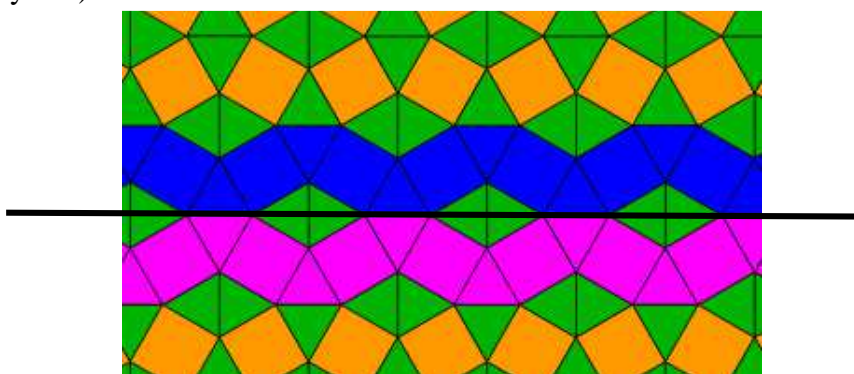
Przykład 7.

Weźmy półforemny parkietaż 3.3.4.3.4. (Rys72).



Rys.72

Zauważmy, że ten parkietaż jest symetryczny. Jeśli odbijemy część parkietażu zaznaczoną na niebiesko wzdłuż czarnej kreski to powstanie nam fioletowy fragment parkietażu (Rys.73).

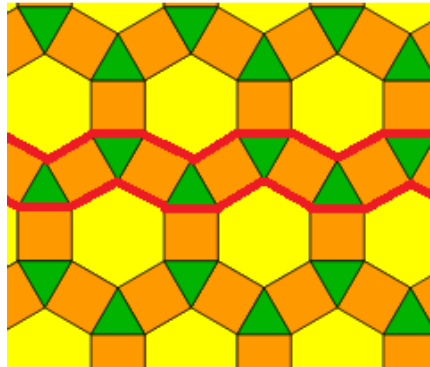


Rys.73

Powyższa własność będzie nam potrzebna do stworzenia kolejnych dwóch parkietaży 2-Archimedesowych.

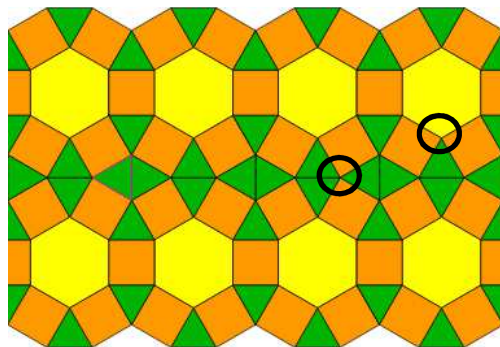
Podprzypadek 7.A.

Rozpatrzmy parkietaż półforemny 3.4.6.4. Spójrzmy na poniższy rysunek (Rys.74).



Rys.74

Zauważmy, że fragment parkietażu z rys. pomiędzy dwiema czerwonymi liniami jest taki sam, jak niebieski fragment z rysunku nr 73. Odbijmy, więc zaznaczony fragment wzdłuż prostej, jak na rysunku nr 73. A następnie w puste miejsca wstawmy trójkąty, jak na rysunku poniżej (Rys.75).

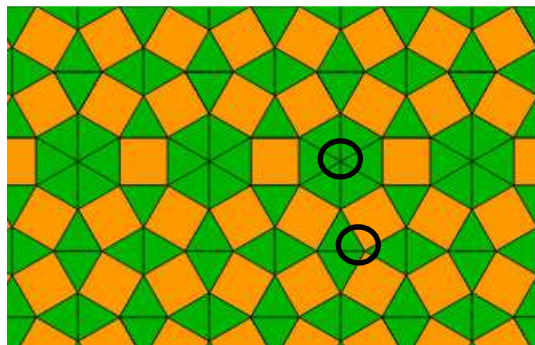


Rys.75

Widzimy, że w ten sposób powstał parkietaż 2-Archimedeoswy o typie wierzchołków 3.3.4.3.4 i 3.4.6.4.

Podprzypadek 7B.

Weźmy parkietaż foremny 3.3.3.4.3.4 i wykonajmy odbicie wzdłuż czarnej prostej, jak na rysunku nr 73. Następnie rozetnijmy parkietaż wzdłuż tej prostej i przesuńmy w dół o długość boku wielokąta. W miejsce, gdzie stykały się krawędzią dwa trójkąty wstawmy, kwadrat. A pozostałe miejsca wypełnijmy trójkątami, jak na poniższym rysunku (Rys.76)

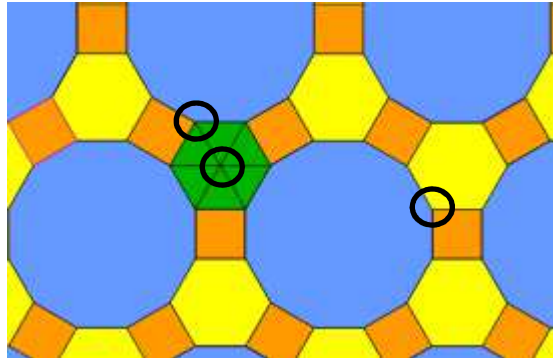


Rys.76

Powstał parkietaż 2-Archimedeoswy o typie wierzchołków 3.3.4.3.4 i 3.3.3.3.3.3.

Przykład 8.

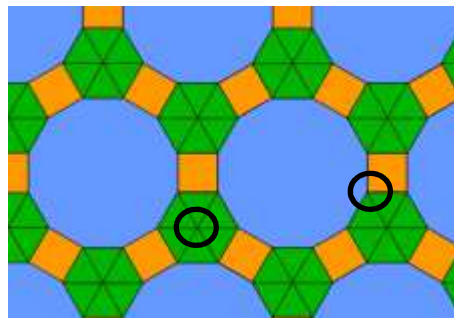
Weźmy parkietaż 4.6.12, który jest półforemny. Usuńmy jeden z sześciokątów, a w jego miejsce wstawmy sześć trójkątów, tak jak robiliśmy w przykładzie 3 (Rys.77).



Rys.77

Spójrzmy na powyższy rysunek (Rys.77). Zauważmy, że zamieniając tylko jeden sześciokąt w sześć trójkątów powstał nam parkietaż o trzech typach wierzchołków (3.3.3.3.3.3 ; 3.3.4.12 ; 4.6.12), a taki parkietaż nie jest parkietażem 2-Archimedesowym zgodnie z definicją.

Zastanówmy się, jak można wyeliminować trzeci typ wierzchołka. Spróbujmy zamienić wszystkie sześciokąty na sześć odpowiednio ułożonych trójkątów (Rys.78).



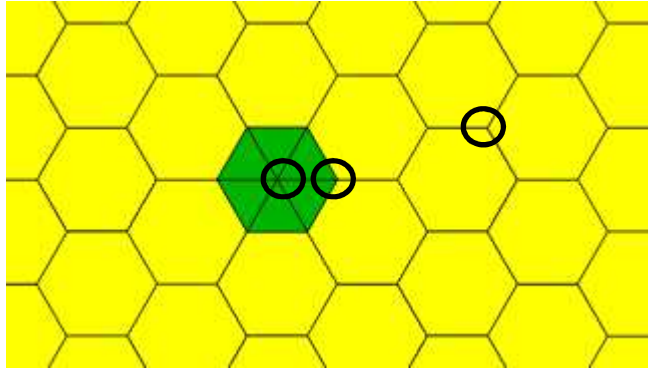
Rys. 78

W ten sposób powstał parkietaż 2-Archimedesowy o typie wierzchołków 3.3.3.3.3.3 i 3.3.4.12.

Przykład 9.

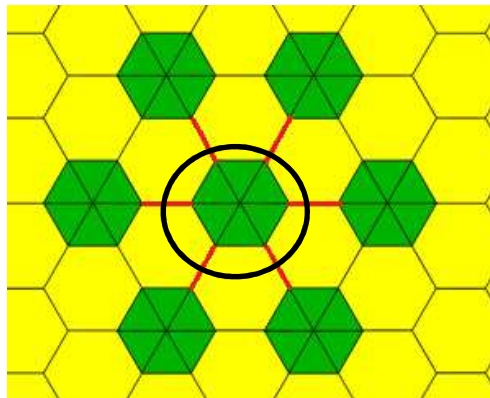
Weźmy parkietaż foremny o typie wierzchołka 6.6.6. Spróbujmy go zmodyfikować tak, aby powstał parkietaż 2-Archimedesowy o typie wierzchołków 3.3.3.3.3.3 i 3.3.6.6.

Chcemy, aby jednym z typów wierzchołka nowego parkietażu był 3.3.3.3.3.3. Zastąpmy, więc jeden z sześciokątów z parkietażu o typie wierzchołka 6.6.6, sześcioma trójkątami jak w przykładzie 7. Spójrzmy na rysunek nr 79.



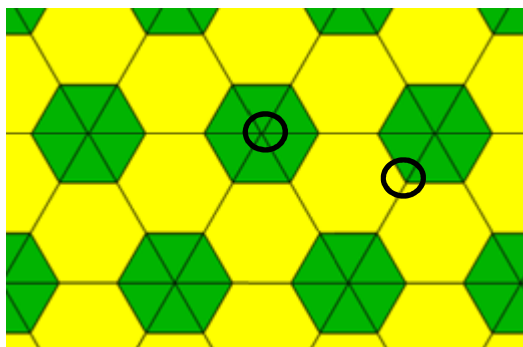
Rys.79

Widzimy, że powstał nam parkietaż o trzech typach wierzchołków (3.3.3.3.3.3 ; 3.3.6.6 ; 6.6.6). Spróbujmy usunąć z parkietażu wierzchołek o typie 6.6.6. W tym celu zastąpmy więcej sześciokątów trójkątami równobocznymi w następujący sposób. Każdy sześciokąt składający się z trójkątów musi być połączony z innym sześciokątem składającym się z trójkątów krawędzią sześciokąta, którego nie zastępujemy trójkątami. Krawędź tą zaznaczono na rysunku kolorem czerwony (Rys.80). Zatem bierzemy nasz wyjściowy sześciokąt zamieniony na trójkąty, zaznaczamy wszystkie krawędzie sześciokątów, które się z nim stykają (kolor czerwony), a następnie sześciokąty znajdujące się na końcu krawędzi zamieniamy na sześć trójkątów (Rys.80).



Rys.80

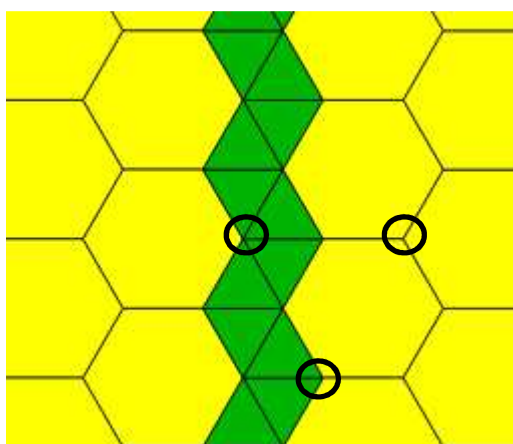
Aby ostatecznie wyeliminować typ wierzchołka 6.6.6, opisana powyżej zależność musi zachodzić dla wszystkich wielokątów występujących w parkietażu. Operacja taka daje się przeprowadzić i powstaje w ten sposób parkietaż 2-Archimedesowy o typie wierzchołków 3.3.3.3.3.3 i 3.3.6.6 (Rys.81).



Rys.81

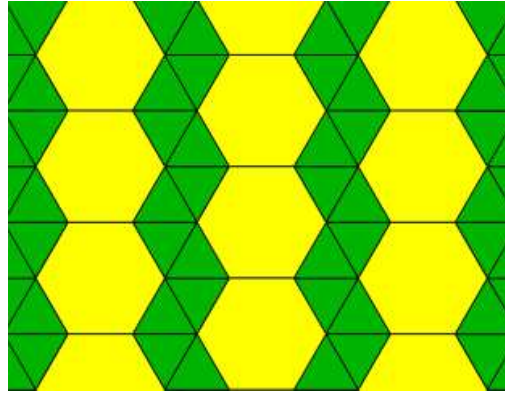
Przykład 10.

Rozpatrzmy po raz kolejny parkietaż foremny o typie wierzchołka 6.6.6. Spróbujemy go zmodyfikować, tak, aby powstał parkietaż 2-Archimedesowy o typie wierzchołka 3.3.6.6 i 3.3.3.3.6. W tym celu rozetnijmy parkietaż 6.6.6 wzdłuż krawędzi sześciokątów, a następnie wstawmy w to miejsce kolumnę trójkątów, w której w każdym rzędzie znajdują się po dwa trójkąty. A następnie zsuńmy odpowiednio parkietaż tzn. prawą stronę ponieśmy do góry o długość wysokości trójkąta. Spójrzmy na powstały parkietaż (Rys.82).



Rys. 82

Powstał parkietaż o trzech typach wierzchołków (3.3.3.3.6 ; 3.3.6.6 ; 6.6.6). Spróbujemy wyeliminować wierzchołek o typie 6.6.6. W tym celu musimy rozciąć parkietaż w analogiczny sposób jak wyżej wśród wszystkich krawędzi sześciokątów i w miejsce rozcięcia wstawić powyższą kolumnę trójkątów. Wtedy powstanie parkietaż 2-Archimedesowy o typie wierzchołków 3.3.3.3.6 i 3.3.6.6 (Rys.83).



Rys.83

Przykłady 1-10 pokazują, że dla wszystkich szesnastu par typów wierzchołków wymienionych na początku Podrozdziału 2.2 istnieją parkietaże 2-Archimedesowe o takich typach. Każdy z powyższych parkietaży ściśle wypełnia całą płaszczyznę, ponieważ został utworzony poprzez zmodyfikowanie istniejącego parkietażu foremego lub półforemego.

W ten sposób w podrozdziałach 2.1 i 2.2 przeprowadziliśmy pełną klasyfikację wszystkich możliwych typów parkietaży 2-Archimedesowych.

Twierdzenie 2.2.1 *Istnieje szesnaście par typów wierzchołków, z których możemy zbudować parkietaż 2-Archimedesowy. Są to następujące pary wierzchołków:*

(3.4.6.4 ; 4.6.12), (3.4.6.4 ; 3.4.4.6), (3.4.6.4 ; 3.4.4.6), (3.4.6.4 ; 3.3.3.4.4),
 (3.3.3.3.3.3 ; 3.3.3.3.6), (3.3.3.4.4 ; 3.3.3.3.3.3), (3.3.3.4.4 ; 4.4.4.4),
 (3.3.3.4.4 ; 3.3.4.3.4), (3.6.3.6 ; 3.3.6.6), (3.6.3.6 ; 3.3.3.3.6), (3.12.12 ; 3.4.3.12),
 (3.3.4.3.4 ; 3.4.6.4), (3.3.4.3.4 ; 3.3.3.4.4); (3.3.3.3.3.3 ; 3.3.4.12), (3.3.3.3.3.3 ; 3.3.6.6),
 (3.3.6.6 ; 3.3.3.3.6).

3. Liczba parkietaży

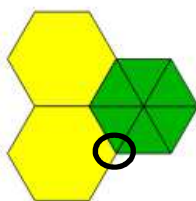
W poprzednim rozdziale pokazaliśmy, że typów parkietaży 2-Archimedesowych jest szesnaście. Oznacza to, że istnieje szesnaście par typów wierzchołków, z których możemy zbudować parkietaż 2-Archimedesowy. Jednak każda z tych par nie wyznacza nam jednoznacznie, ile wierzchołków danego typu występuje w konkretnym parkietażu. Stąd możemy przypuszczać, że każdy parkietaż 2-Archimedesowy da się narysować na kilka bądź kilkadziesiąt sposobów. Zatem w tym rozdziale postaramy się odpowiedzieć na pytanie, ile dokładnie parkietaży 2-Archimedesowych możemy utworzyć z wierzchołków danego typu.

3.1. Skończona liczba parkietaży

W tym podrozdziale będziemy chcieli pokazać, z jakich par typów wierzchołków możemy utworzyć skończoną liczbę parkietaży 2-Archimedesowych. Będziemy rozpatrywać następujące pary: 3.3.3.3.3.3 i 3.3.6.6, 3.4.6.4 i 3.3.3.4.4, 3.3.4.12 i 3.3.3.3.3.3, 3.3.6.6 i 3.3.3.3.6.

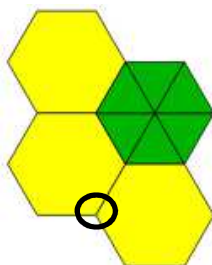
Przykład 1.

Rozważmy fragment parkietażu 2-Archimedesowego o typie wierzchołków 3.3.3.3.3.3 i 3.3.6.6 (Rys.84).



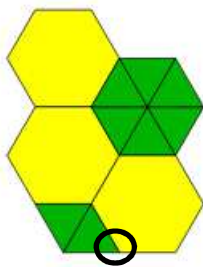
Rys. 84

Przyjrzyjmy się, w jaki sposób z zamieszczonego powyżej fragmentu możemy dalej układać parkietaż 2-Archimedesowy. Weźmy wierzchołek, w którym styka się najwięcej wielokątów (zaznaczony na czarno – Rys.84). Widzimy, że w tym wierzchołku stykają się dwa trójkąty i sześciokąt, stąd jedyną możliwością ułożenia parkietażu jest wstawienie w tym miejscu drugiego sześciokąta (Rys. 85).



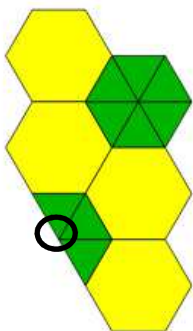
Rys.85

Następnie zauważmy, że w zaznaczonym na czarno wierzchołku parkietażu z rysunku 85 stykają się dwa sześciokąty, stąd w tym miejscu możemy wielokąty dołożyć tylko na jeden sposób tzn. dokładamy dwa trójkąty (Rys. 86).

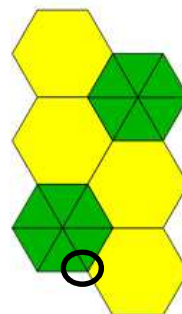


Rys.86

Do kolejnego wierzchołka, zaznaczonego na czarno na rysunku 86 również możemy parkietaż dołożyć tylko na jeden sposób tzn. trójkąt i sześciokąt (Rys.87). Zauważmy, że po takim dołożeniu powstał nam wierzchołek, w którym stykają się trzy trójkąty, więc w to miejsce dokładamy jeszcze trzy trójkąty (Rys.88).

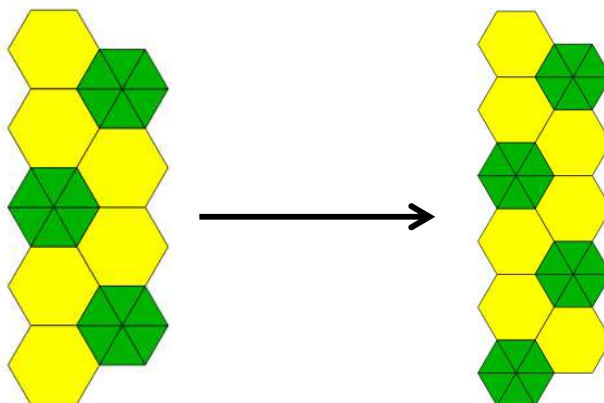


Rys.87



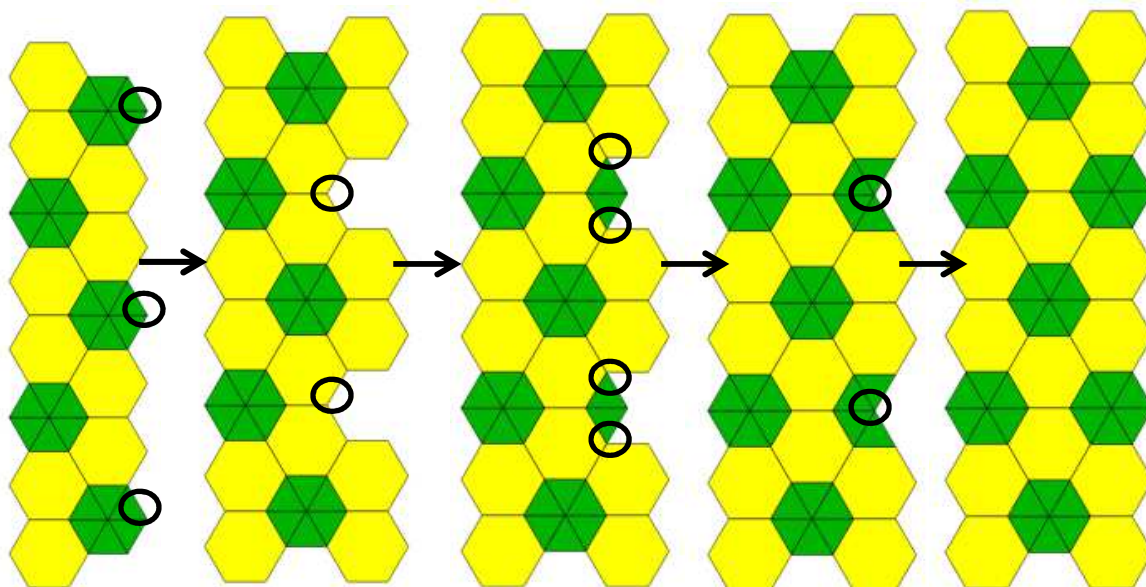
Rys.88

Spójrzmy na zaznaczony wierzchołek z rysunku 88. Zauważmy, że jesteśmy teraz w sytuacji z rysunku 84, czyli w miejscu, w którym zaczynaliśmy tworzyć nasz parkietaż, ponieważ w zaznaczonym wierzchołku stykają się dwa trójkąty i sześciokąt. Zatem możemy powtórzyć powyższe rozumowanie, dokładając kolejne fragmenty parkietażu w sposób opisany powyżej (Rys. 89).



Rys.89

Zauważmy, że budujemy równocześnie dwie kolumny parkietażu, które są zbudowane w sposób jednoznaczny tzn. nie mamy możliwości wyboru innych wielokątów przy danym wierzchołku. Widzimy również, że opisany powyżej schemat budowy parkietażu jest cykliczny, co powoduje, że możemy dokładać określone wielokąty w nieskończoność. Sprawdźmy teraz, czy kolejna kolumna parkietażu również zostanie wyznaczona w sposób jednoznaczny (Rys.90).



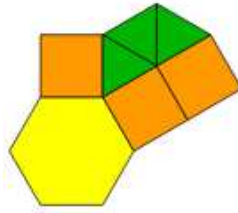
Rys. 90

Rozważmy wszystkie wierzchołki, w których stykają się dwa trójkąty. W te miejsca możemy dołożyć jedynie dwa sześciokąty. Popatrzmy teraz na wierzchołki, w których stykają się dwa sześciokąty (zaznaczone na powyższym rysunku). Zauważmy, że do tych wierzchołków możemy dołożyć jedynie dwa trójkąty. Następnie mamy wierzchołki, w których stykają się dwa trójkąty i sześciokąt, zatem możemy dołożyć trójkąt. Następnie mamy wierzchołek, w którym stykają się cztery trójkąty, więc w tym miejscu dokładamy dwa trójkąty. Zauważmy, że w sposób jednoznaczny powstała nam nowa kolumna parkietażu. Wielokąty w tej kolumnie również występują w sposób cykliczny tzn. po dwóch sześciokątach zawsze występuje sześć trójkątów. Powtarzając powyższe rozumowanie (schemat – Rys.90) możemy utworzyć kolejne kolumny parkietażu w sposób jednoznaczny aż do momentu wypełnienia całej płaszczyzny.

Podsumowując, powyższe rozumowanie pokazuje, że istnieje dokładnie jeden parkietaż o typie wierzchołków 3.3.6.6 i 3.3.3.3.3.3.

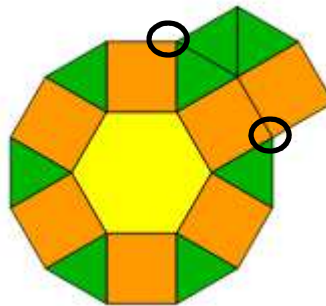
Przykład 2.

Rozważmy fragment parkietażu o typie wierzchołków 3.4.6.4 i 3.3.3.4.4 (Rys. 91).



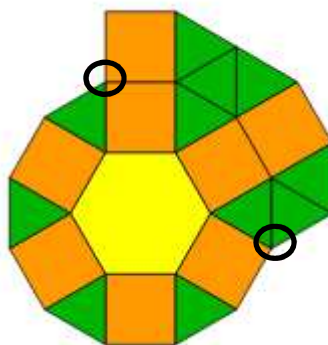
Rys. 91

Zauważmy, że tylko w jednym typie wierzchołków, z których będziemy budować parkietaż występuje sześciokąt. Zatem w sposób jednoznaczny możemy ułożyć wielokąt wokół sześciokąta. Wszystkie wierzchołki posiadające sześciokąt muszą być w typie 3.4.6.4.



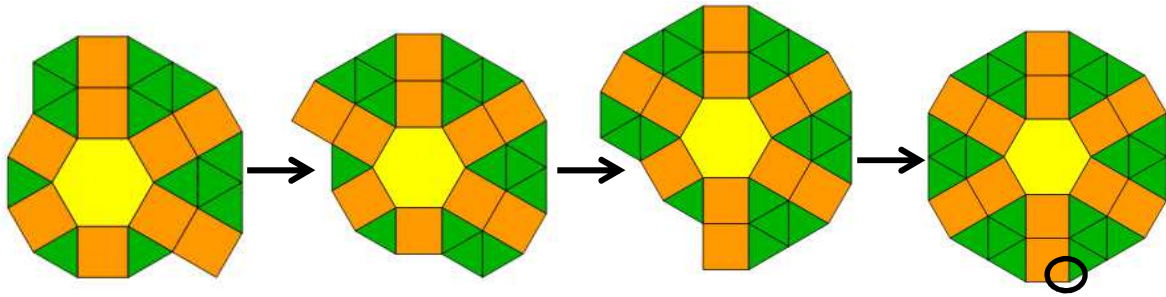
Rys. 92

Następnie zauważmy, że w zaznaczonych na rysunku 92 wierzchołkach możemy dołożyć wielokąty na dokładnie jeden sposób tak, aby typem wierzchołka był 3.3.3.4.4 (Rys.93).



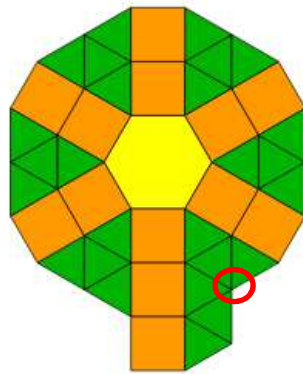
Rys. 93

Zauważmy, że na rysunku 93 powtórzyła nam się sytuacja z rysunku 92. Zatem dołożymy odpowiednie wielokąty. Spójrzmy na poniższy schemat (Rys. 94). Zauważmy, że wielokątami o typie wierzchołka 3.3.3.4.4 obudowaliśmy „otoczkę” sześciokąta.



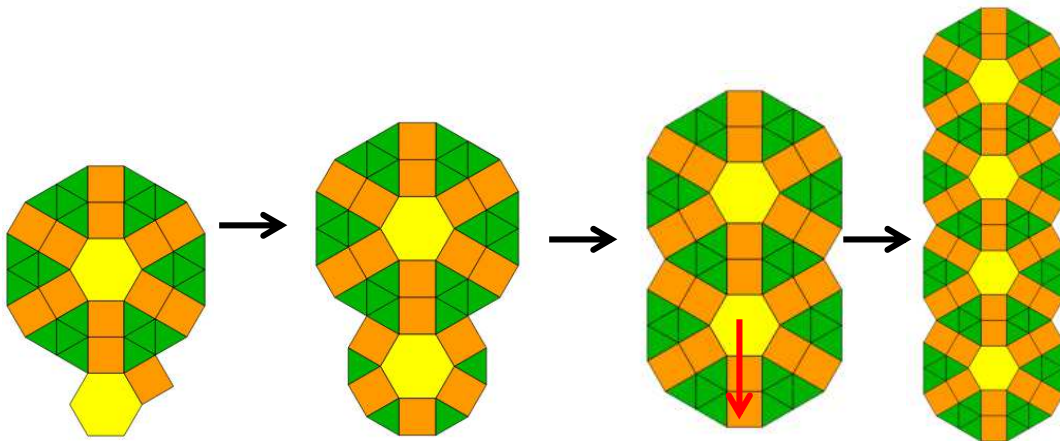
Rys. 94

Rozpatrzmy wierzchołek, w którym styka się trójkąt i kwadrat. Mamy tutaj dwie możliwości dołożenia fragmentu parkietażu. Jednak, jeśli dołożymy wierzchołek w typie 3.3.3.4.4, otrzymamy sprzeczność, polegającą na tym, że powstanie nam nowy typ wierzchołka jak na poniższym rysunku (Rys.95), co jest sprzeczne z definicją parkietażu 2-Archimedesowego.



Rys.95

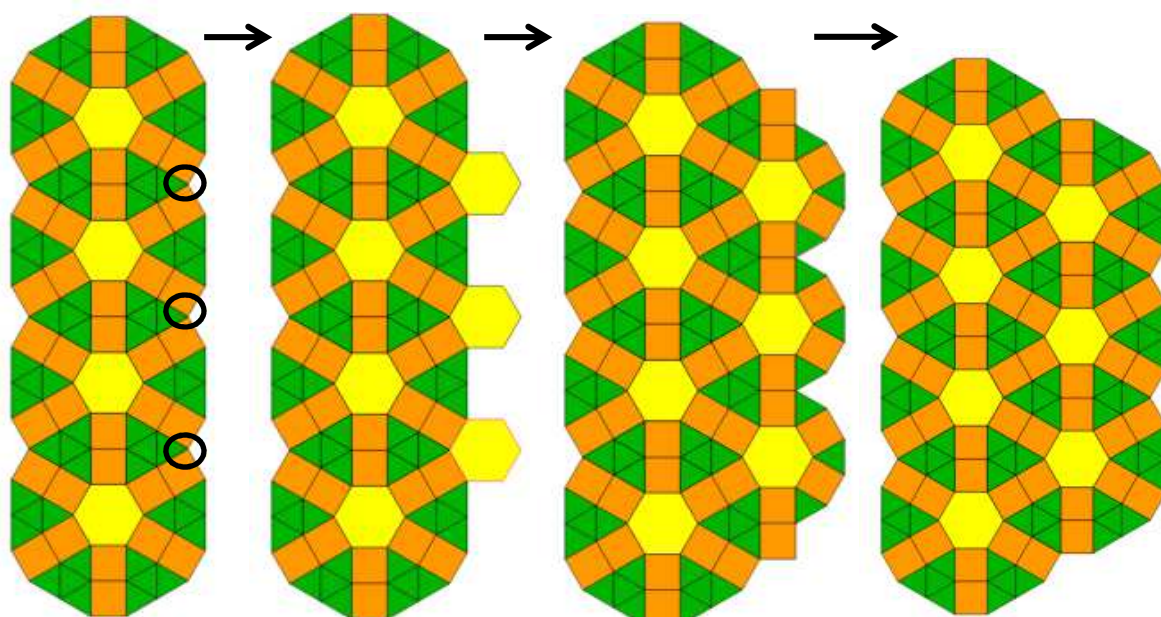
Dołożymy, zatem wielokąty tak, aby wierzchołek był w typie 3.4.6.4. Dołożyliśmy do naszego fragmentu sześciokąt, zatem możemy powtórzyć powyższy schemat. Wszystkie wierzchołki sześciokąta obudujemy wielokątami w sposób jednoznaczny tak, aby były w typie 3.4.6.4, a następnie obudujemy „otoczkę” sześciokąta wielokątami tak, aby typ wierzchołka był 3.3.3.4.4 (Rys.96).



Rys.96

Zauważmy, że jeśli wierzchołek, do którego dokładamy sześciokąt, znajduje się w linii prostej od poprzedniego wierzchołka, od którego rozpoczęliśmy układanie parkietażu to taki wybór będzie nam determinował powstanie kolumny parkietażu (kierunek wskazuje czerwona strzałka). Sprawdźmy teraz, czy potrafimy utworzyć kolejną kolumnę parkietażu.

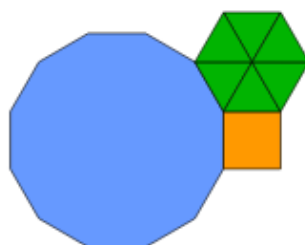
Weźmy wierzchołki, w których spotykają się kwadrat, trójkąt i kwadrat. W tym miejscu możemy dołożyć sześciokąt. Następnie wiemy, że każdy sześciokąt ma wszystkie wierzchołki w typie 3.4.6.4, więc obudowujemy sześciokąt odpowiednimi wielokątami. Następnie obudowujemy „otoczkę” sześciokąta wielokątami, tak, aby wszystkie wierzchołki były w typie 3.3.3.4.4, jak na rysunku 94 (schemat budowy – Rys.97). Zauważmy, że nowa kolumna powstała nam w sposób jednoznaczny. Stąd tak jak opisano powyżej możemy utworzyć kolejne kolumny parkietażu o typach wierzchołków 3.3.3.4.4 i 3.4.6.4, co powoduje, że istnieje dokładnie jeden parkietaż 2-Archimedesowy o tym typie wierzchołków.



Rys.97

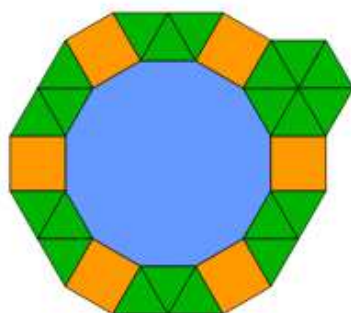
Przykład 3.

Rozważmy fragment parkietażu o typie wierzchołków 3.3.4.12 i 3.3.3.3.3.3 (Rys.98).



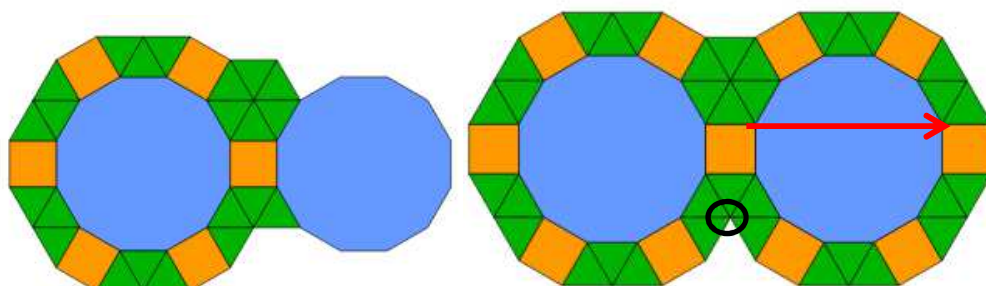
Rys.98

Zauważmy, że tylko w jednym typie wierzchołków parkietażu występuje dwunastokąt. Stąd możemy dwunastokąt obudować wielokątami tak, aby wszystkie jego wierzchołki były w typie 3.3.4.12 (Rys.99).



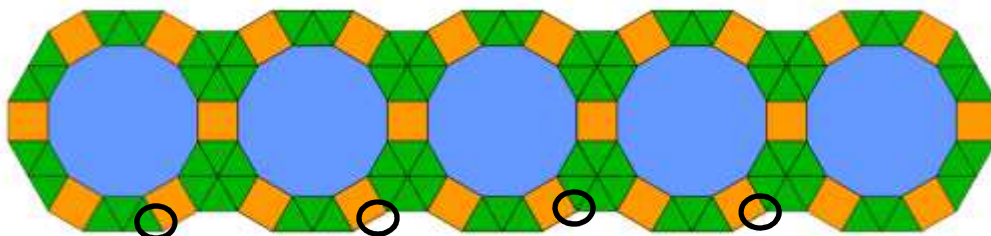
Rys.99

Na powyższym rysunku widzimy, że wybierając dowolny wierzchołek fragmentu parkietażu to możemy wielokąty dołożyć na dokładnie jeden sposób. Rozpatrzmy wierzchołek, w którym styka się kwadrat i trójkąt. Wiemy, że jedyna możliwość dołożenia wielokątów w tym miejscu to dołożenie trójkąta i dwunastokąta (Rys.100). Zauważmy, że jeśli we fragmencie parkietażu pojawił się dwunastokąt to możemy powielić powyższy schemat i obudować go wielokątami.



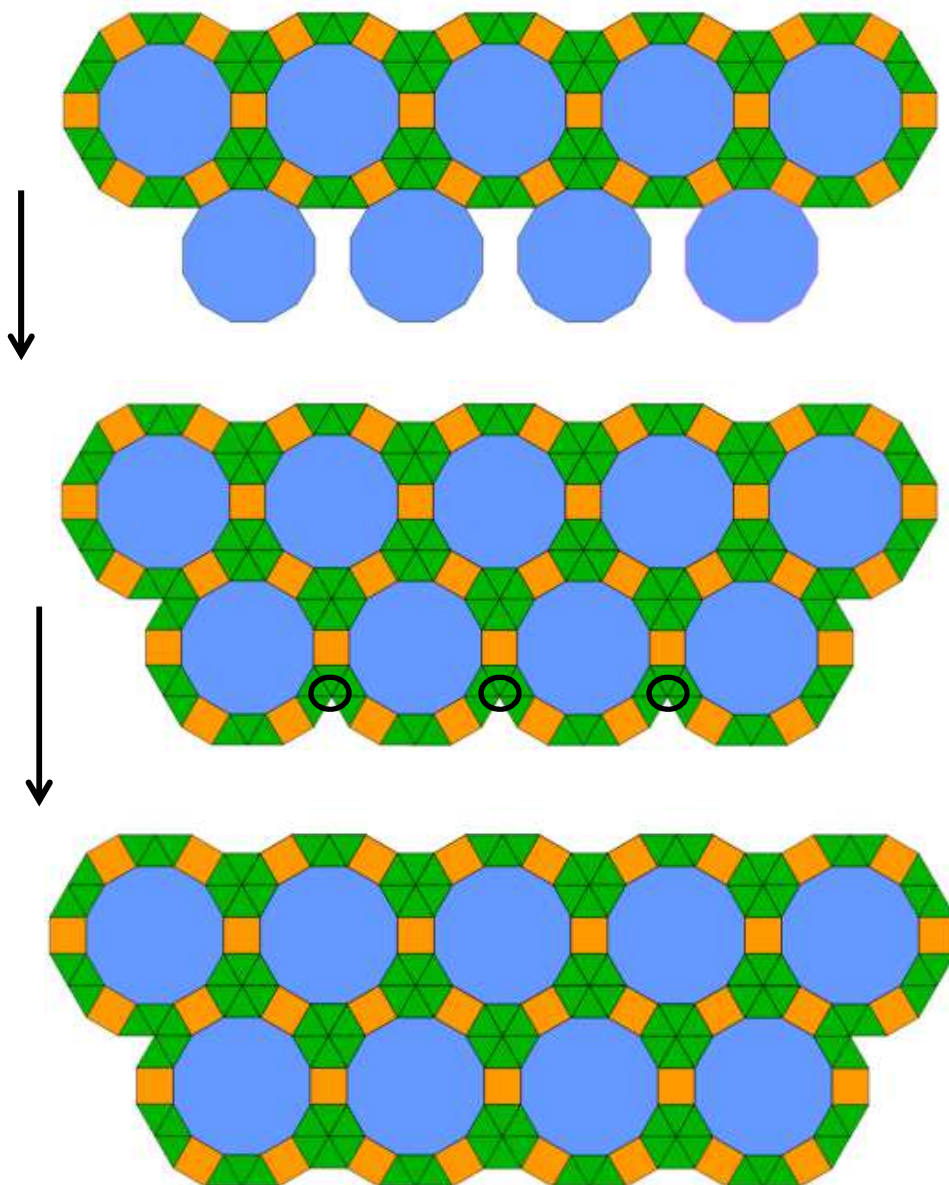
Rys. 100

Do wierzchołka, w którym styka się pięć trójkątów, dokładamy trójkąt. Zauważmy, że powielając powyższy schemat działania, możemy utworzyć rząd takich samych figur. Wystarczy, że będziemy dokładać wielokąty w tym samym kierunku tzn., że wybierzemy wierzchołek, który znajduje się w pewnej odległości w linii prostej od poprzedniego (Rys.101).



Rys.101

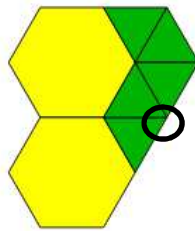
Sprawdźmy teraz, czy potrafimy utworzyć kolejny rząd parkietażu. Wybierzmy wierzchołek, w którym styka się kwadrat i trójkąt. Jedyne, co możemy zrobić, to dołożyć do niego dwunastokąt, a następnie skorzystać z powyżej opisanego schematu tzn. obudować dwunastokąt wielokątami. Następnie do wierzchołków, w których styka się pięć trójkątów, dołożymy trójkąt. Zauważmy, że w sposób jednoznaczny powstał nam nowy rząd parkietażu 2-Archimedesowego o typie wierzchołków 3.12.12 i 3.3.3.3.3. Powielając powyższy schemat (Rys.102) możemy utworzyć kolejne rzędy parkietażu 2-Archimedesowego o tym typie wierzchołków, cały czas w sposób jednoznaczny. Powyższe rozumowanie pokazuje, że istnieje tylko jeden parkietaż o tym typie wierzchołków.



Rys.102

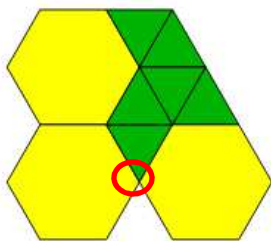
Przykład 4.

Rozważmy fragment parkietazu 2-Archimedesowego o typie wierzchołków 3.3.6.6 i 3.3.3.3.6 (Rys.103).

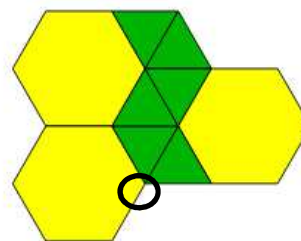


Rys.103

Przyjrzyjmy się, w jaki sposób z zamieszczonego powyżej fragmentu możemy dalej układać parkietaz 2-Archimedesowy. Weźmy wierzchołek, w którym styka się najwięcej wielokątów (zaznaczony na czarno – Rys.103). Zauważmy, że w tym wierzchołku stykają się trzy trójkąty, stąd jedyną możliwością jest dołożenie w tym miejscu trójkąta oraz sześciokąta. Możemy to zrobić na dwa sposoby (Rys.104 i Rys.105). Jednak jeśli zrobimy to tak, jak na rysunku 104 to otrzymamy sprzeczność polegającą na tym, że powstanie nam wierzchołek nowego typu, co jest sprzeczne z definicją parkietazu 2-Archimedesowego.

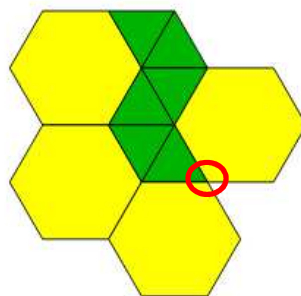


Rys.104



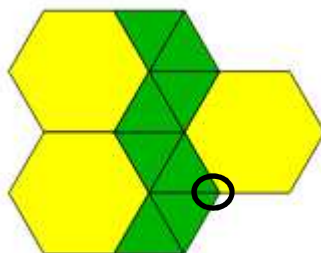
Rys.105

Dołożymy, zatem wielokąty, jak na rysunku 105. Wybierzmy wierzchołek, w którym stykają się trzy wielokąty (zaznaczony na czarno – Rys.105). Widzimy, że w tym wierzchołku stykają się dwa trójkąty i sześciokąt, stąd mamy dwie możliwości dołożenia wielokątów do wierzchołka. Jednak, jeśli dołożymy wierzchołek w typie 3.3.6.6, otrzymamy sprzeczność polegającą na tym, że powstanie nam nowy typ wierzchołka, co jest sprzeczne z definicją parkietazu 2-Archimedesowego (Rys.106).



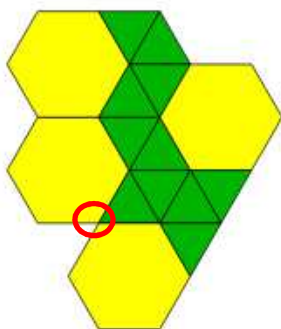
Rys.106

Dołożmy, zatem wielokąty tak, aby wierzchołek był w typie 3.3.3.3.6. Dołożyliśmy do naszego fragmentu dwa trójkąty (Rys.107).

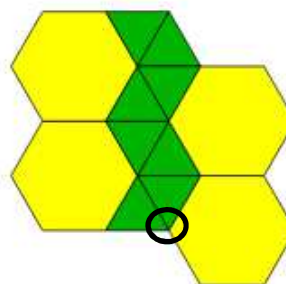


Rys.107

Zauważmy, że do wierzchołka zaznaczonego na czarno na rysunku 108 możemy dołożyć wielokąty na dwa sposoby. Jednak, jeśli dołożymy do wierzchołka dwa trójkąty, to w kolejnych krokach otrzymamy sprzeczność polegającą na tym, że powstanie nowy typ wierzchołka (Rys.108). Dołożmy zatem wielokąty, tak aby zaznaczony wierzchołek (Rys.107) był w typie 3.3.6.6 (Rys.109).

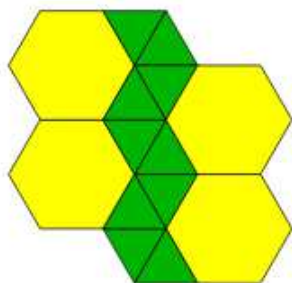


Rys.108

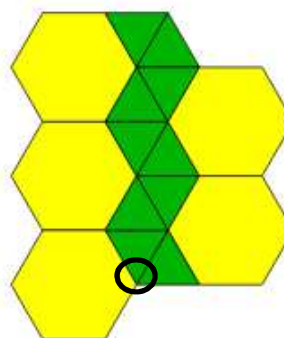


Rys.109

Zauważmy, że jesteśmy teraz w sytuacji z rysunku 105. Stąd musimy dołożyć do wierzchołka dwa trójkąty (Rys.110). Po takim dołożeniu znajdujemy się w sytuacji z rysunku 107, stąd musimy dołożyć do wierzchołka sześciokąt. (Rys.111).



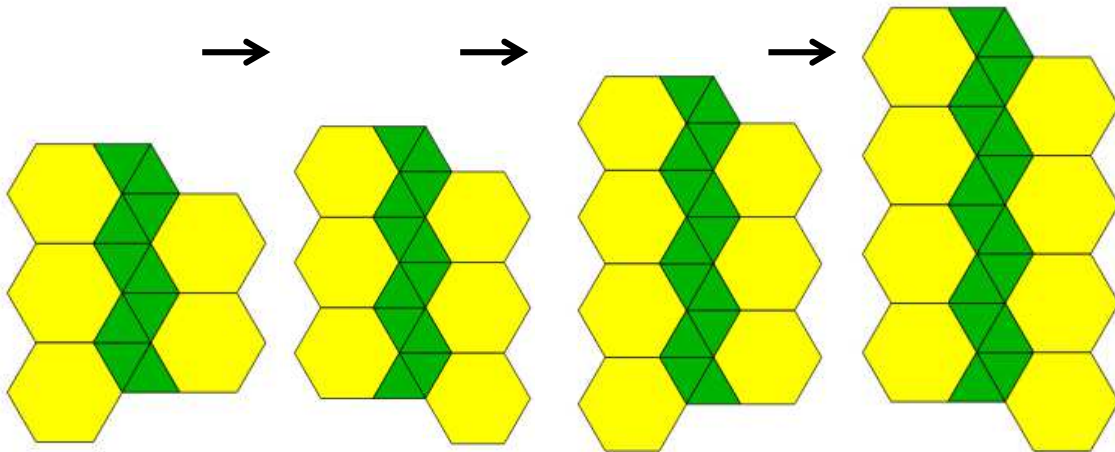
Rys.110



Rys.111

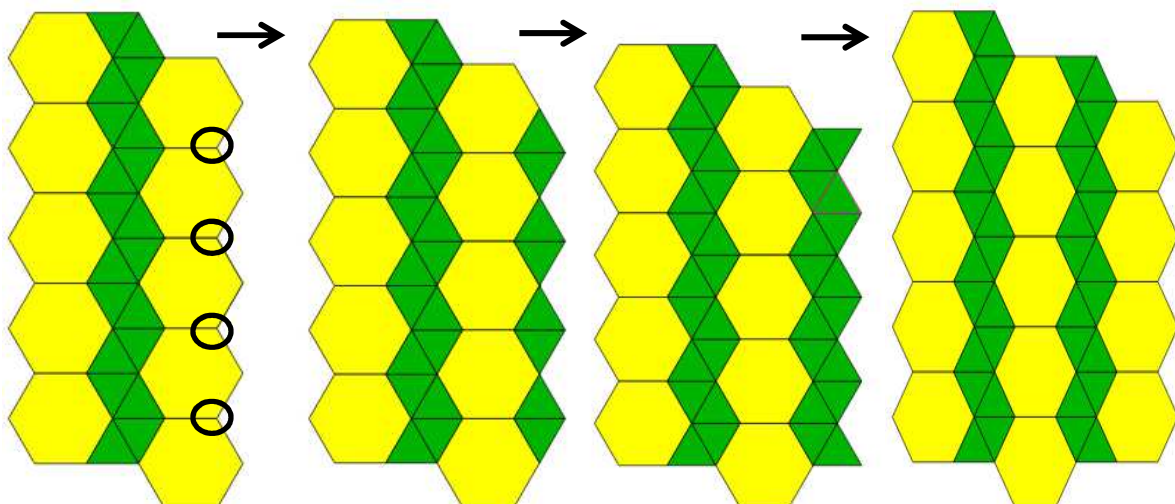
Zauważmy, że znowu jesteśmy w sytuacji z rysunku 105, stąd powtarzając powyższe rozumowanie możemy dokładać kolejne fragmenty parkietu. Opisany schemat budowy jest cykliczny, stąd możemy dokładać określone wielokąty w nieskończoność (Rys.112). W ten

sposób budujemy równocześnie dwie kolumny parkietażu (domyślnie kolumną określamy kolumnę sześciokątów).



Rys.112

Sprawdźmy teraz, czy potrafimy ułożyć kolejną kolumnę parkietażu. Rozważmy wierzchołki, w których stykają się dwa sześciokąty (zaznaczone schemacie – Rys.113). Zauważmy, że w te miejsca możemy dołożyć jedynie dwa trójkąty. Następnie w miejsce, gdzie styka się trójkąt, sześciokąt i trójkąt możemy dołożyć jedynie dwa trójkąty. Dalej mamy wierzchołek, w którym stykają się cztery trójkąty, więc do niego możemy dołożyć tylko sześciokąt. Zauważmy, że w sposób jednoznaczny powstała nam nowa kolumna parkietażu. Powtarzając powyższe rozumowanie (schemat – Rys.113) możemy utworzyć kolejne kolumny parkietażu w sposób jednoznaczny aż do momentu wypełnienia całej płaszczyzny, co pokazuje, że istnieje dokładnie jeden parkietaż 2-Archimedesowy o typie wierzchołków 3.3.6.6 i 3.3.3.3.6.



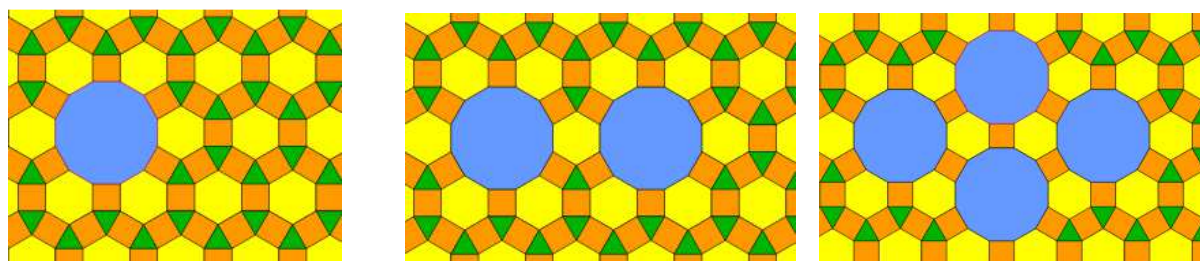
Rys.113

3.2. Nieskończona liczba parkietaży

W poprzednim podrozdziale pokazaliśmy, że z czterech par typów wierzchołków da się utworzyć skończoną liczbę parkietaży, a dokładniej, że da się z nich utworzyć tylko jeden parkietaż. Tytuł obecnego podrozdziału nasuwa od razu przypuszczenie, że pozostałych par typów wierzchołków da się utworzyć nieskończenie wiele parkietaży. Czy jest to ostateczna odpowiedź na pytanie zadane na początku rozdziału trzeciego? O tym przekonamy się za chwilę.

Przypadek 1.

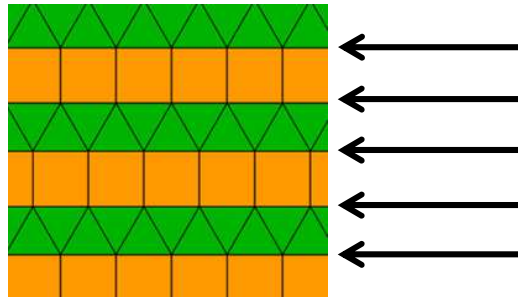
Rozważmy parkietaże o typach wierzchołków: 3.4.4.6 i 3.4.6.4, 3.3.3.3.3.3 i 3.3.3.3.6, 4.6.12 i 3.4.6.4. Przypomnijmy, że przykłady takich parkietaży opisane w Rozdziale 2.2 zostały utworzone poprzez wycięcie określonego fragmentu z parkietażu półforemnego lub foremego i zastąpieniu go innym (szczegółowy opis – Rozdział 2.2). Zauważmy, że ilość powyższych parkietaży zależy od tego ile fragmentów parkietażu możemy wyciąć i w jakich miejscach będą te wycięcia. Oczywiście jest to, że parkietaż z wyciętymi dwoma fragmentami różni się od parkietażu gdzie tych elementów zostało wyciętych pięć, dziesięć czy piętnaście. Zatem skoro parkietujemy przestrzeń, która jest nieskończona, więc oczywiście jest, że takich fragmentów możemy wyciąć dowolnie wiele. Stąd parkietaży 2-Archimedesowych o powyższych typach wierzchołków jest nieskończenie wiele. Poniżej na rysunku 114 pokazane jest kilka przykładów parkietaży 2-Archimedesowych o typach wierzchołków 3.4.6.4 i 4.6.12 (domyślnie poza fragmentami pokazanymi na rysunku nie ma już żadnych dalszych wycięć).



Rys.114

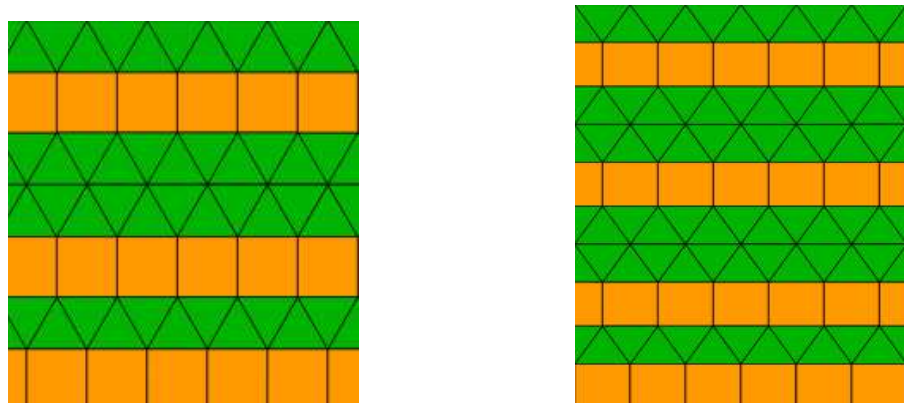
Przypadek 2.

Rozważmy parkietaże o typach wierzchołków: 3.3.3.3.3.3.3 i 3.3.3.4.4, 3.3.3.3.6 i 3.6.3.6, 3.6.3.6 i 3.4.4.6, 3.6.3.6 i 3.3.6.6, 3.12.12 i 3.4.3.12, 3.3.3.4.4 i 4.4.4.4, 3.3.4.3.4 i 3.4.6.4. Przypomnijmy, że przykłady podane w Rozdziale 2.2. zostały utworzone poprzez rozcięcie parkietażu półforemnego lub foremego i wstawienie w rozcięte miejsce nowego fragmentu wielokątów (dokładny opis – Rozdział 2.2). Weźmy parkietaż o typie wierzchołków 3.3.3.3.3.3 i 3.3.3.4.4. Wiemy, że został on utworzony poprzez rozcięcie parkietażu 3.3.3.4.4 i wstawienie do niego rzędu trójkątów. Spójrzmy na rysunek 115.



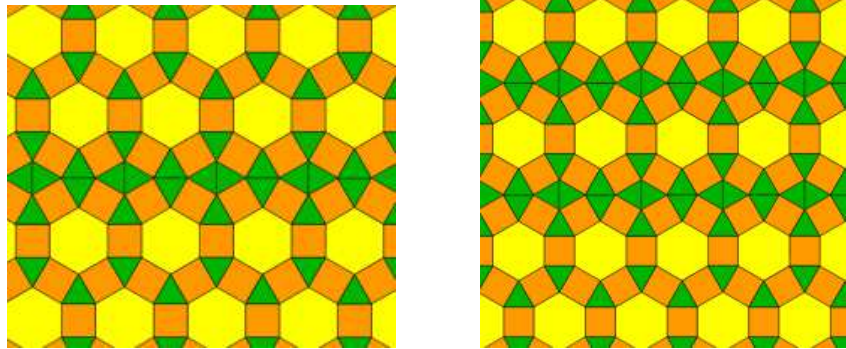
Rys.115

Widzimy, że czarne kreski na rysunku 115 wyznaczają miejsca, w których można rozciąć parkietaż i wstawić do niego nowy fragment. Wiemy, że taki parkietaż jest nieskończony, zatem możliwości rozcięcia parkietażu jest nieskończenie wiele. Oczywiście jest, że parkietaż, który rozetniemy dwa razy będzie różny od parkietażu, który rozetniemy pięć bądź sto razy. Skoro dany parkietaż możemy rozciąć w nieskończenie wielu miejscach to w wszystkich takich parkietaży będzie nieskończenie wiele. W analogiczny sposób możemy skomentować pozostałe przypadki. Na rysunku 116 pokazano przykłady parkietaży 2-Archimedesowych o typie wierzchołków 3.3.3.3.3.3 i 3.3.3.4.4 (domyślnie, poza fragmentem pokazanym na rysunku nie ma już żadnych rozcięć parkietażu).



Rys.116

Zauważmy, że parkietaże 3.3.3.4.4 i 3.3.4.3.4, 3.3.4.3.4 i 3.3.3.3.3.3 tworzymy nieco inaczej, bo poprzez odbicie wzdłuż prostej określonego fragmentu parkietażu (dodatkowo w przypadku drugiej z powyższych par typów rozsuwamy parkietaż) i wstawieniu w wolne pola nowych wielokątów. Jednak pokazanie, że takich parkietaży jest nieskończenie wiele, sprowadza się do przypadku opisanego powyżej. Mamy nieskończenie wiele miejsc, w których możemy odbić fragment parkietażu, co oznacza, że takich parkietaży jest nieskończenie wiele. Na kolejnej stronie (Rys.117) pokazano przykłady parkietaży 2-Archimedesowych o typie wierzchołków 3.3.3.4.4 i 3.3.4.3.4 (domyślnie, poza fragmentem pokazanym na rysunku nie ma już żadnych odbić w parkietażu).



Rys.117

Pokażemy teraz, że wszystkich powyższych parkietaży 2-Archimedesowych opisanych w Przypadku 1 i 2 nie tylko jest nieskończenie wiele, ale również nieprzeliczalnie wiele. W tym celu wykorzystamy poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 3.2.1 *Jeśli zbiór X ma więcej niż jeden element, to zbiór wszystkich ciągów nieskończonych o wyrazach z X jest nieprzeliczalny.*

Poniższy dowód Twierdzenia 3.2.1 jest bardzo podobny do rozumowania przeprowadzonego w książce pt. „Wstęp do teorii zbiorów i kombinatoryki” autorstwa Grzegorza Szkiubiela [3].

Dowód 3.2.1.

Niech zbiór X ma, co najmniej dwa elementy, które oznaczmy przez a i b . Załóżmy nie wprost, że zbiór wszystkich ciągów nieskończonych o wyrazach ze zbioru X jest przeliczalny, a to oznacza, że jego elementy możemy ustawić w ciąg.

Zatem rozważmy ustawienie wszystkich elementów zbioru X w ciąg:

$$X = \{x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}, x^{(5)}, \dots\}$$

Zauważmy, że wyrazy ciągu X tzn. $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \dots$ są również nieskończonymi ciągami o następującej postaci:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, x_4^{(1)}, \dots) \\ x^{(2)} &= (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, x_4^{(2)}, \dots) \\ x^{(3)} &= (x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)}, x_4^{(3)}, \dots) \\ x^{(4)} &= (x_1^{(4)}, x_2^{(4)}, x_3^{(4)}, x_4^{(4)}, \dots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Rozważmy nowy ciąg:

$$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)}, \dots)$$

Ciąg ten tworzymy według następującego wzoru:

$$x_n^{(0)} = \begin{cases} a, & \text{jeśli } x_n^{(n)} \neq a \\ b, & \text{jeśli } x_n^{(n)} = a \end{cases}$$

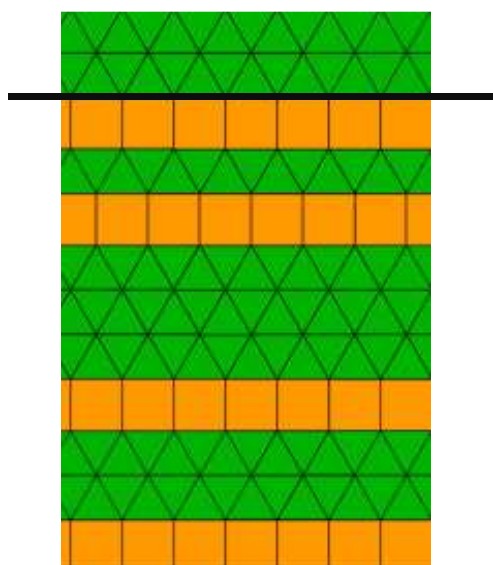
Widzimy, że nasz nowy ciąg składa się z elementów ze zbioru X. Zauważmy, że dla $n=1,2,3,4, \dots$ n-ty wyraz ciągu $x^{(0)}$ jest różny od n-tego wyrazu ciągu $x^{(n)}$. Stąd widzimy, że ciąg $x^{(0)}$ jest różny od każdego z ciągów $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$. Różni się od każdego z tych ciągów na przynajmniej jednym miejscu. Zatem ciąg $x^{(0)}$ nie należy do zbioru X.

Stąd otrzymaliśmy sprzeczność z założeniem, że zbiór wszystkich ciągów nieskończonych o wyrazach z X jest przeliczalny, co kończy dowód.

Twierdzenie 3.2.1 pozwoli nam pokazać, że opisanych w tym rozdziale (poniżej) parkietaży jest nieprzeliczalnie wiele.

Przykład 1.

Rozważmy parkietaż o typach wierzchołków 3.3.3.3.3.3 i 3.3.3.4.4. Parkietaż ten składa się z rzędów kwadratów oraz rzędów trójkątów. Przyporządkujmy teraz liczbę kolejno pojawiających się rzędów trójkątów występujących w parkietażu poszczególnym elementom ciągu. Załóżmy, że powyżej czarnej prostej z rysunku 118 pojawiają się same rzędy trójkątów, a rzędy kwadratów kolejno, na zmianę z rzędami trójkątów będą pojawiać się poniżej tej prostej. Zauważmy, że w tym parkietażu rząd kwadratów pomiędzy rzędami trójkątów będzie zawsze dokładnie jeden. W przeciwnym wypadku parkietaż nie byłby 2-Archimedesowy, ponieważ pojawiłby się wierzchołek nowego typu (4.4.4.4). Popatrzmy na przykład (Rys.118).



Rys. 118

Widzimy, że w parkietażu pod czarną kreską występują kolejno rząd kwadratów, rząd trójkątów, rząd kwadratów, trzy rzędy trójkątów, rząd kwadratów, dwa rzędy trójkątów, rząd

kwadratów itd. Stąd przyporządkowując liczbę rzędów trójkątów elementom ciągu, otrzymujemy następujący ciąg, nazwijmy go p_1 o początkowych wyrazach:

$$p_1 = (1,3,2,\dots)$$

Powyższy ciąg jednoznacznie determinuje budowę parkietażu. Wiemy, że parkietaż jest nieskończony, zatem składa się z nieskończenie wielu rzędów wielokątów. Oznacza to, że nasz ciąg będzie miał nieskończenie wiele wyrazów.

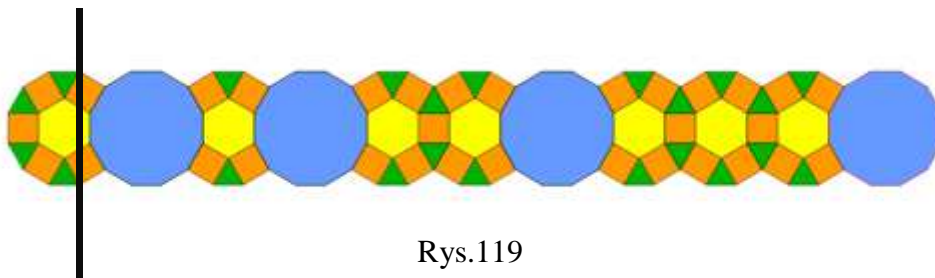
Pozostałym parkietażom 2-Archimedesowym o typie wierzchołków 3.3.3.4.4 i 3.3.3.3.3 również możemy przyporządkować ciągi, które determinują ich jednoznaczną budowę. Z dowodu 3.2.1. wiemy, że zbiór wszystkich ciągów nieskończonych jest nieprzeliczalny. A skoro każdy ciąg tego zbioru odpowiadał innemu parkietażowi 2-Archimedesowemu, to zbiór wszystkich parkietaży o typie wierzchołków 3.3.3.4.4 i 3.3.3.3.3 również jest nieprzeliczalny.

Analogiczny dowody można przeprowadzić dla parkietaży o parach typów: 3.3.3.3.6 i 3.6.3.6, 3.6.3.6 i 3.4.4.6, 3.6.3.6 i 3.3.6.6, 3.12.12 i 3.4.3.12, 3.3.3.4.4 i 4.4.4.4, 3.3.3.4.4 i 3.3.4.3.4, 3.3.4.3.4 i 3.3.3.3.3, 3.3.4.3.4 i 3.4.6.4.

Przykład 2.

Nieco inaczej budujemy parkietaże 2-Archimedesowe o typie wierzchołków 3.3.3.3.3 i 3.3.3.3.6, 3.4.4.6 i 3.4.6.4, 4.6.12 i 3.4.6.4.

Rozpatrzmy parkietaż o typie wierzchołków 4.6.12 i 3.4.6.4. Pokażemy, jak w sposób jednoznaczny ułożyć rząd takiego parkietażu. Ustawmy sześciokąty występujące w rzędzie tego parkietażu w ciąg. Załóżmy, że na lewo od miejsca zaznaczonego czarną prostą nie ma żadnych dwunastokątów. Zaczynamy zliczać sześciokąty od momentu pojawienia się pierwszego dwunastokąta. Oczywiście pojawienie się sześciokąta będzie determinowało również pojawienie się pozostałych wielokątów wokół niego. Zauważmy, że pomiędzy sześciokątami zawsze będzie się pojawiał dokładnie jeden dwunastokąt w przeciwnym razie parkietaż nie byłby 2-Archimedesowy. Zatem zapiszmy w postaci ciągu rząd sześciokątów występujących na poniższym rysunku (Rys.119).



Rys.119

$$r_1 = (1,2,3,\dots)$$

Zatem widzimy, że w naszym rzędzie zgodnie z kolejnością występowania mamy dwunastokąt, sześciokąt (w domyśle z otoczką), dwunastokąt, dwa sześciokąty, dwunastokąt,

trzy sześciokąty, dwunastokąt itd. Załóżmy, że dwunastokąty na prawo od czarnej prostej będą pojawiały się sukcesywnie nieskończenie wiele razy. Stąd wiemy, że w danym rzędzie będzie nieskończenie wiele sześciokątów, więc ciąg r_1 jest nieskończony. Zajmijmy się w tym miejscu parkietażami, które tylko w jednym rzędzie mają dwunastokąty, a w pozostałych rzędach jedyny typ wierzchołka to 3.4.6.4. Zauważmy, że dla wszystkich pozostałych parkietaży, rzędom, w których występują dwunastokąty możemy przyporządkować ciągi, które będą determinowały budowę parkietażu w sposób jednoznaczny tzn. elementy ciągu wskażą, jak zbudować rząd parkietażu a pozostałe wierzchołki będą w typie 3.4.6.4. Powołując się na Twierdzenie 3.2.1, wiemy, że zbiór wszystkich ciągów nieskończonych jest nieprzeliczalny. A skoro każdy ciąg determinuje powstanie innego parkietażu 2-Archimedesowego o typie wierzchołków 3.4.6.4 i 4.6.12, więc takich parkietaży jest nieprzeliczalnie wiele. Zatem skoro parkietaży o jednym rzędzie, w którym występują dwunastokąty jest nieprzeliczalnie wiele, to tym bardziej nieprzeliczalnie wiele będzie parkietaży, które posiadają więcej rzędów zawierających wielokąty.

Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla parkietaży o typie wierzchołków 3.3.3.3.6 i 3.3.3.3.3.3 oraz 3.4.4.6 i 3.4.6.4.

W ten sposób w Podrozdziałach 3.1 i 3.2 pokazaliśmy, ile parkietaży 2-Archimedesowych potrafimy utworzyć z danej pary typów wierzchołków. Posiadamy cztery pary wierzchołków, dla których liczba parkietaży jest skończona, a ściślej mówiąc, wynosi jeden. Są to następujące pary: 3.3.3.3.3.3 i 3.3.6.6, 3.4.6.4 i 3.3.3.4.4, 3.3.4.12 i 3.3.3.3.3.3, 3.3.6.6 i 3.3.3.3.6. Natomiast dla pozostałych dwunastu par wierzchołków, parkietaż 2-Archimedesowy potrafimy utworzyć na nieprzeliczalnie wiele sposobów.

Bibliografia

- [1] B. Grunbaum, G.C. Shephard, *Tilings and Patterns*. Dover Publications, New York, 2016.
- [2] S. Jeleński, *Śladami Pitagorasa*. Wyd. VII. Warszawa: WSiP, 1974. Posadzkowanie, s. 195 – 207.
- [3] G. Szkibiel, *Wstęp do teorii zbiorów i kombinatoryki*. Szczecin: Wydaw. Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, 2002.

Wszystkie rysunki wykonałam samodzielnie.

Przy sporządzeniu i opracowaniu rysunków korzystałam z programu: *Tessellation Creator*, dostępnego na stronie <http://illuminations.nctm.org/Activity.aspx?id=3533>.