

Uniwersytet Wrocławski  
Wydział Matematyki i Informatyki  
Instytut Matematyczny  
*Specjalność matematyka nauczycielska*

*Magdalena Dukiewicz*

O PEWNYM SPOSOBIE ŚCISŁEGO WPROWADZENIA  
POLA DLA WIELOKĄTÓW I OBJĘTOŚCI DLA WIELOŚCIANÓW

Praca magisterska  
napisana pod kierunkiem  
prof. dr hab. Jacka Świątkowskiego

Wrocław, 2005

**Spis treści:**

Wstęp .....	7
Rozdział 1 WPROWADZENIE POLA DLA WIELOKĄTÓW ZA POMOCĄ TRÓJKĄTÓW .....	9
Rozdział 2 AKSJOMATY POLA .....	23
Rozdział 3 ZDEFINIOWANIE OBJĘTOŚCI DLA WIELOŚCIANÓW ZA POMOCĄ CZWOROŚCIANÓW .....	25
Rozdział 4 AKSJOMATY OBJĘTOŚCI .....	49

## Wstęp

Głównym celem tej pracy jest ściśle zdefiniowanie pojęcia pola dla wielokątów oraz pojęcia objętości dla wielościanów.

Celem pierwszego rozdziału jest zdefiniowanie pojęcia pola dla wielokątów. Do zrealizowania tego celu, wykorzystany zostanie fakt, że każdy wielokąt można podzielić na trójkąty. Każdemu trójkątowi zostanie przypisana pewna liczba  $L(T)$ . Wielokątowi, można przypisać sumę liczb  $L(T)$  poszczególnych trójkątów, powstałych z podziału danego wielokąta. Pokażę, że – niezależnie od podziału wielokąta na trójkąty - wartość przypisana wielokątowi, która jest sumą wartości poszczególnych trójkątów, będzie taka sama i tę wartość nazwiemy polem wielokątów.

Następnie w drugim rozdziale pokażę, że tak zdefiniowana wielkość, spełnia własności, które powinno spełniać pole, czyli tzw. aksjomaty pola.

Trzeci rozdział poświęcony będzie zdefiniowaniu objętości wielościanów. Ponieważ każdy wielościan można podzielić na czworościany, to możemy przypisać wielościanowi sumę pewnych wielkości przypisanych poszczególnym czworościanom podziału. Pokażę, że – bez względu na sposób podziału na czworościany – suma wartości przypisanych w ten sposób wielościanowi będzie jednakowa. Tak określoną wartość nazwiemy objętością wielościanu.

Zdefiniowana wielkość posiada własności zwane aksjomatami objętości, co zostanie przedstawione w końcowym etapie pracy – w czwartym rozdziale.

## Rozdział 1

### WPROWADZENIE POLA DLA WIELOKĄTÓW ZA POMOCĄ TRÓJKĄTÓW

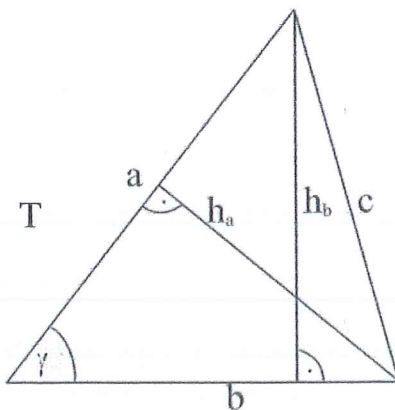
Celem tego rozdziału jest ścisłe wprowadzenie pola dla wielokątów za pomocą trójkątów. Aby osiągnąć ten cel, trzeba będzie wprowadzić kilka lematów oraz ich dowody. W tej pracy wielokątem nazywać będziemy dowolną figurę na płaszczyźnie, dającą przedstawić się jako sumę skończonej liczby niezachodzących na siebie trójkątów (mających rozłączne wnętrza).

Każdemu trójkątowi  $T$  przyporządkujemy pewną wielkość  $L(T)$ , którą zdefiniujemy jako  $L(T) = \frac{a \cdot h}{2}$ , gdzie  $a$  jest wybranym bokiem trójkąta, a  $h$  wysokością trójkąta opuszczoną na dany bok  $a$ .

LEMAT 1.

Wartość  $L(T)$  jest niezależna od wyboru boku, będącego podstawą tego trójkąta oraz wysokości opuszczonej na ten bok.

DOWÓD LEMATU 1.

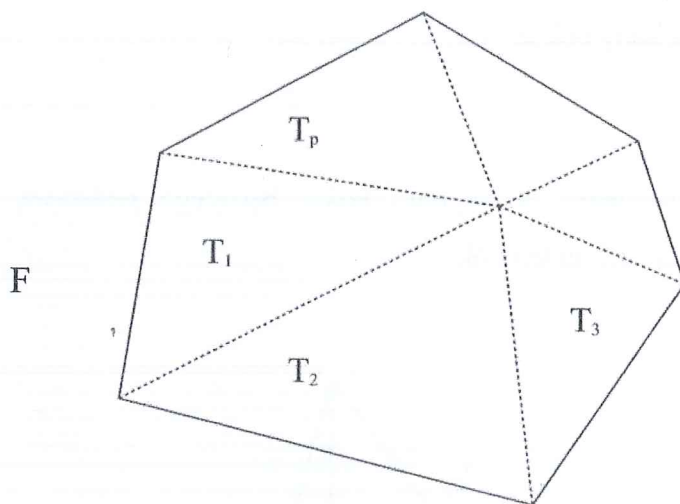


Rys. 1. Trójkąt  $T$  o bokach  $a, b, c$ .

Niech będzie dany trójkąt o bokach  $a, b, c$ . Oznaczmy wysokości trójkąta opuszczone na boki  $a, b$  jako  $h_a, h_b$  (rysunek 1). Pokażemy, że  $\frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2}$ .

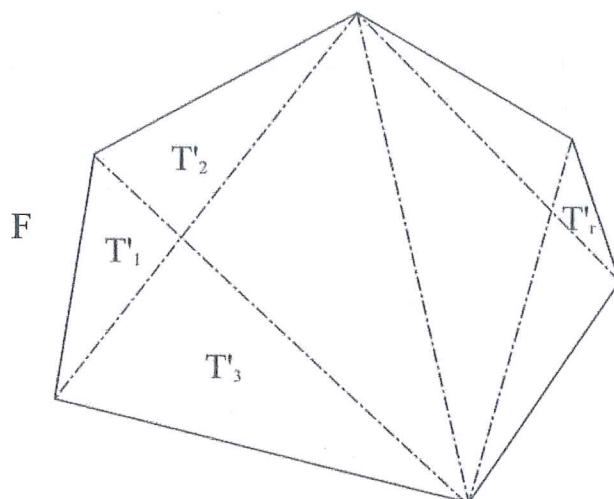
Niech  $\gamma$  oznacza kąt między bokami  $a$ ,  $b$ . Przy takim oznaczeniu  $h_a = b \sin \gamma$ ,  $h_b = a \sin \gamma$ . Wtedy  $\frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{a(b \sin \gamma)}{2} = \frac{b(a \sin \gamma)}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2}$ . Analogicznie można pokazać równość wielkości  $\frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$  oraz  $\frac{c \cdot h_c}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2}$ . Stąd  $\frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$ , czyli wartość  $L(T)$  nie zależy od wyboru boku i wysokości na niego opuszczonej.

Każdy z niezachodzących trójkątów możemy kolejno oznaczyć  $T_1, T_2, \dots, T_p$  (rysunek 2). Stąd dowolny wielokąt można zapisać jako  $F = T_1 + T_2 + \dots + T_p$ . Używamy w tym zapisie symbolu  $+$  zamiast  $\cup$  w celu zaznaczenia, że figury nie zachodzą na siebie.



Rys. 2. Podział figury  $F$  na trójkąty  $T_1, T_2, \dots, T_p$ .

Tę samą figurę możemy podzielić w inny sposób na trójkąty. Oznaczając kolejne niezachodzące na siebie trójkąty jako  $T'_1, T'_2, \dots, T'_r$ , możemy wielokąt  $F$  zapisać jako  $F = T'_1 + T'_2 + \dots + T'_r$  (rysunek 3).



Rys. 3. Podział figury  $F$  na trójkąty  $T_1', T_2', \dots, T_r'$ .

Dla każdego wielokąta  $F$  oraz jego rozkładu na trójkąty  $T_1, T_2, \dots, T_p$  będziemy rozważać wielkość  $\sum_{i=1}^p L(T_i)$ . Dla tego samego wielokąta  $F$  i jego innego rozkładu na trójkąty  $T_1', T_2', \dots, T_r'$  otrzymamy wielkość  $\sum_{i=1}^r L(T_i')$ . Można się zastanowić czy, pomimo różnego sposobu rozłożenia danej figury na trójkąty, wielkości  $\sum_{i=1}^p L(T_i)$  oraz  $\sum_{i=1}^r L(T_i')$  będą równe.

**TWIERDZENIE 2.**

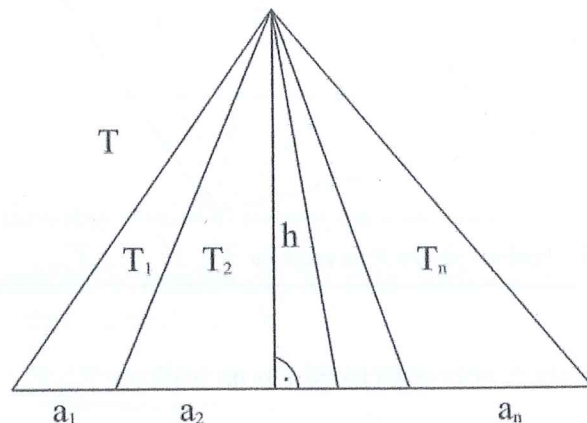
Niech  $F$  będzie dowolnym wielokątem. Niech  $T_1, T_2, \dots, T_p$  będzie dowolnym podziałem wielokąta  $F$  na trójkąty, a  $T_1', T_2', \dots, T_r'$  będzie innym podziałem tego wielokąta na trójkąty. Wówczas  $\sum_{i=1}^p L(T_i) = \sum_{i=1}^r L(T_i')$ .

Udowodnienie tego twierdzenia jest głównym celem tego rozdziału. Będziemy udowadniać kolejne lematy, które stanowią kolejne kroki w realizacji celu głównego (udowodnienia równości  $\sum_{i=1}^p L(T_i) = \sum_{i=1}^r L(T_i')$ ).

LEMAT 2.1

Jeśli trójkąt  $T$  podzielimy na mniejsze trójkąty  $T_1, T_2, \dots, T_n$  odcinkami wychodzącymi z ustalonego wierzchołka trójkąta  $T$ , to  $L(T) = L(T_1) + L(T_2) + \dots + L(T_n)$ .

DOWÓD LEMATU 2.1



Rys. 4. Podział trójkąta  $T$  na trójkąty  $T_1, T_2, \dots, T_n$  odcinkami wychodzącymi z wierzchołka trójkąta  $T$ .

Wystarczy zauważyć, że trójkąt  $T$  oraz wszystkie trójkąty  $T_i$  podziału mają taką samą wysokość  $h$  (rysunek 4). Ponieważ suma podstaw  $a_i$  trójkątów  $T_i$  równa jest podstawie  $a$  trójkąta wyjściowego  $T$ , to otrzymujemy

$$L(T) = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)h}{2} = \frac{a_1 \cdot h}{2} + \frac{a_2 \cdot h}{2} + \dots + \frac{a_n \cdot h}{2} = L(T_1) + L(T_2) + \dots + L(T_n),$$

co chcieliśmy pokazać.

Kolejny lemat będzie dotyczył trapezów. Dowolnemu trapezowi  $W$  przyporządkujemy wielkość  $L(W)$ , którą zdefiniujemy jako  $L(W) = \frac{(a+b)h}{2}$  gdzie  $a$  i  $b$  są podstawami trapezu, a  $h$  jest wysokością trapezu.

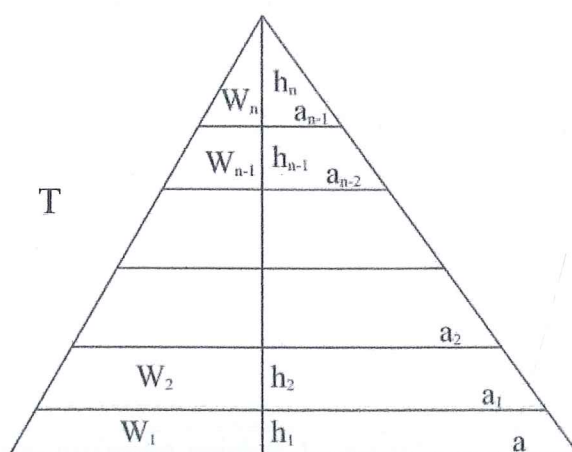
Jeśli trójkąt  $T$  podzielimy odcinkami równoległymi do podstawy trójkąta  $a$ , to uzyskamy niezachodzące na siebie trapezy  $W_1, W_2, \dots, W_{n-1}$  oraz trójkąt  $W_n$  (rysunek 5).

LEMAT 2.2

Jeśli trójkąt  $T$  jest podzielony prostymi równoległymi do podstawy tak, że powstaną

trapezy  $W_i$  oraz trójkąt  $W_n$ , to  $L(T) = \sum_{i=1}^n L(W_i)$ .

DOWÓD LEMATU 2.2



Rys. 5. Podział trójkąta  $T$  na trapezy  $W_1, W_2, \dots, W_{n-1}$  i trójkąt  $W_n$ .

Przyjmijmy zgodne z rys. 5, następujące oznaczenia:

- $a, a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}$  – podstawy wielokątów podziału,
- $h_1, h_2, \dots, h_{n-1}, h_n$  – wysokości wielokątów podziału,
- $H = h_1 + h_2 + \dots + h_{n-1} + h_n$  – wysokość trójkąta  $T$ .

Korzystając z podobieństwa, otrzymujemy  $\frac{a_i}{a} = \frac{h_{i+1} + \dots + h_n}{h_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_n} = \frac{h_{i+1} + \dots + h_n}{H}$ ,

czyli  $a_i = \frac{a}{H}(h_{i+1} + \dots + h_n)$ , dla  $i = 1, \dots, n-1$ . Wykorzystując przyjęte oznaczenia,

możemy przeprowadzić następujące wyliczenie

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n L(W_i) &= \frac{(a+a_1)h_1}{2} + \frac{(a_1+a_2)h_2}{2} + \dots + \frac{(a_{i-1}+a_i)h_i}{2} + \dots + \frac{a_{n-1}h_n}{2} = \\ &= \left[ a + \frac{a}{H}(h_2 + h_3 + \dots + h_n) \right] \frac{h_1}{2} + \left[ \frac{a}{H}(h_2 + h_3 + \dots + h_n) + \frac{a}{H}(h_3 + \dots + h_n) \right] \frac{h_2}{2} + \dots + \\ &\quad \left[ \frac{a}{H}(h_i + \dots + h_n) + \frac{a}{H}(h_{i+1} + \dots + h_n) \right] \frac{h_i}{2} + \dots + \frac{a}{H}(h_n) \frac{h_n}{2} = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{a}{2H} \{ [H + (h_2 + h_3 + \dots + h_n)] h_1 + [h_2 + 2(h_3 + \dots + h_n)] h_2 + \dots + \\
 &\quad [h_i + 2(h_{i+1} + \dots + h_n)] h_i + \dots + h_n^2 \} = \\
 &= \frac{a}{2H} \{ [h_1 + 2(h_2 + h_3 + \dots + h_n)] h_1 + [h_2 + 2(h_3 + \dots + h_n)] h_2 + \dots + \\
 &\quad [h_i + 2(h_{i+1} + \dots + h_n)] h_i + \dots + h_n^2 \} = \\
 &= \frac{a}{2H} \{ [h_1^2 + 2h_1(h_2 + h_3 + \dots + h_n)] + [h_2^2 + 2h_2(h_3 + \dots + h_n)] + \dots + \\
 &\quad [h_i^2 + 2h_i(h_{i+1} + \dots + h_n)] + \dots + h_n^2 \} = \\
 &= \frac{a}{2H} \left( \sum_{i=1}^n h_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n h_i h_j \right) = \frac{a}{2H} \left( \sum_{i=1}^n h_i \sum_{i=1}^n h_i \right) = \frac{a}{2H} H^2 = \frac{aH}{2} = L(T)
 \end{aligned}$$

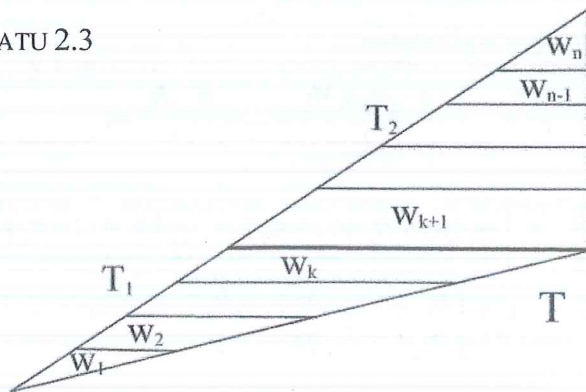
Stąd  $L(T) = \sum_{i=1}^n L(W_i)$ , co kończy dowód Lematu 2.2.

Rozważmy teraz podział trójkąta  $T$  rodziną odcinków równoległych do siebie, ale nie równoległych do żadnego z boków trójkąta. Do końca jednego z odcinków należy jeden z wierzchołków trójkąta (rysunek 6). W wyniku tego podziału powstaną trapezy i trójkąty  $W_1, W_2, \dots, W_n$ . Za pomocą lematów udowodnionych wcześniej w tej pracy, pokażemy, że  $L(T) = \sum_{i=1}^n L(W_i)$ .

### LEMAT 2.3

Jeśli trójkąt  $T$  został podzielony prostymi równoległymi tak, że powstały trapezy i trójkąty  $W_1, \dots, W_n$  jak na rysunku 6, to  $L(T) = \sum_{i=1}^n L(W_i)$ .

### DOWÓD LEMATU 2.3



Rys. 6. Podział trójkąta  $T$  na wielokąty (trójkąty i trapezy)  $W_1, W_2, \dots, W_n$ .

Wystarczy zauważyć, że dany trójkąt  $T$  możemy podzielić na dwa trójkąty  $T_1$  oraz  $T_2$ , w taki sposób, że jeden z odcinków dzielący trójkąt wyjściowy będzie wspólną podstawą tych trójkątów (rysunek 6). Korzystając z Lematu 2.2, dostajemy równość

$$L(T_1) = \sum_{i=1}^k L(W_i) \quad \text{oraz} \quad L(T_2) = \sum_{i=k+1}^n L(W_i).$$

$$L(T) = L(T_1) + L(T_2). \quad \text{Stąd} \quad L(T) = L(T_1) + L(T_2) = \sum_{i=1}^k L(W_i) + \sum_{i=k+1}^n L(W_i) = \sum_{i=1}^n L(W_i),$$

czyli  $L(T) = \sum_{i=1}^n L(W_i)$ , co należało pokazać.

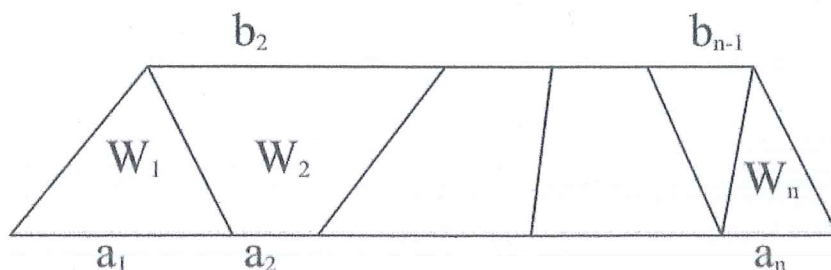
Rozważmy sytuację, kiedy mamy dany trapez  $W$ , który jest podzielony odcinkami mającymi swoje końce w podstawach trapezu  $W$ . Odcinki te nie mają wspólnych punktów wewnątrz trapezu. Efektem tego podziału są trapezy i trójkąty  $W_1, \dots, W_n$ , których podstawy zawierają się w podstawie trapezu  $W$  (rysunek 7).

Zastanówmy się, czy  $L(W) = \sum_{i=1}^n L(W_i)$ .

#### LEMAT 2.4

Jeśli trapez  $W$  jest podzielony na wielokąty  $W_1, \dots, W_n$  (trójkąty i trapezy), odcinkami nie mającymi punktów wspólnych wewnątrz trapezu, których końce zawierają się w jego podstawach, to  $L(W) = \sum_{i=1}^n L(W_i)$ .

#### DOWÓD LEMATU 2.4



Rys. 7. Podział trapezu na wielokąty (trójkąty i trapezy)  $W_1, W_2, \dots, W_n$ .

Zauważmy, że trójkąt można potraktować jako rodzaj zdegenerowanego (nieprawidłowego) trapezu, w którym górna podstawa (sprowadzająca się do punktu) ma długość zero. W tym wypadku wielkości  $\frac{(a+b)h}{2}$  oraz  $\frac{ah}{2}$  są sobie równe.

Będziemy więc w tym dowodzie stosować wzór  $L(W) = \frac{(a+b)h}{2}$  zarówno do trójkątów jak i trapezów.

Aby uzasadnić równość  $L(W) = \sum_{i=1}^n L(W_i)$  wystarczy zauważyć, że trapez wyjściowy  $W$  oraz wszystkie trapezy i trójkąty  $W_1, \dots, W_n$  powstałe w wyniku podziału, mają taką samą wysokość  $h$ . Ponieważ suma długości podstaw  $a_i$  oraz  $b_i$  wielokątów równa jest długościom podstaw trapezu wyjściowego  $a$  i  $b$ , to otrzymujemy następujący ciąg równości:

$$L(W) = \frac{(a+b)h}{2} = \frac{[(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (b_1 + b_2 + \dots + b_n)]h}{2} =$$

$$\frac{(a_1 + b_1)h}{2} + \frac{(a_2 + b_2)h}{2} + \dots + \frac{(a_n + b_n)h}{2} = \sum_{i=1}^n L(W_i),$$

co kończy dowód Lematu 2.4.

Aby udowodnić Twierdzenie 2, trzeba jeszcze rozpatrzyć przypadek podziału trójkąta  $T$  na mniejsze trójkąty.

#### LEMAT 2.5

Jeśli trójkąt  $T$  podzielimy w dowolny sposób na trójkąty  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ ,

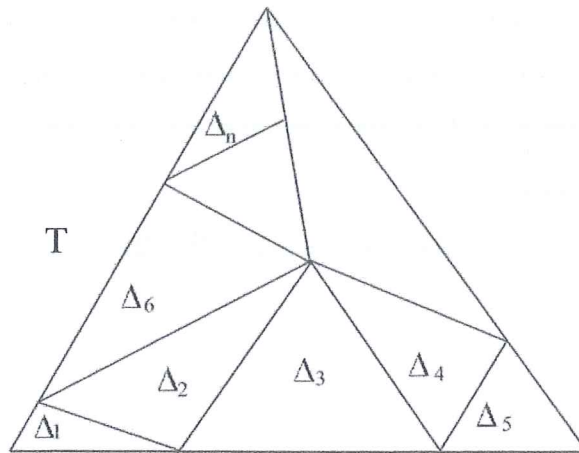
$$\text{to } L(T) = \sum_{k=1}^n L(\Delta_k).$$

#### DOWÓD LEMATU 2.5

Dowód tej równości rozłożymy na trzy etapy.

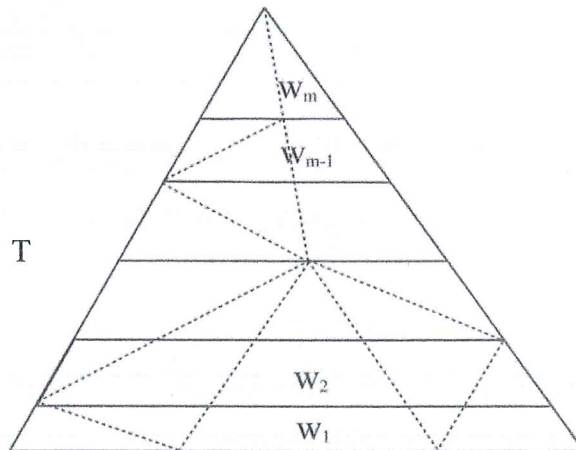
Etap 1:

Trójkąt  $T$  jest podzielony w dowolny sposób na trójkąty  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$  - pierwszy podział (rysunek 8).



Rys. 8. Podział trójkąta  $T$  na trójkąty  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ .

Przez ten sam trójkąt  $T$  prowadzimy proste równoległe do podstawy, które dzielą trójkąt  $T$  na wielokąty (trapezy  $W_1, W_2, \dots, W_{m-1}$  oraz trójkąt  $W_m$ ), które dla potrzeb dowodu będziemy nazywać trapezami  $W_1, W_2, \dots, W_m$  - drugi podział (rysunek 9). Proste tego podziału dobieramy w ten sposób, aby wszystkie wierzchołki, wszystkich trójkątów  $\Delta_k$  zawierały się w tych prostych.



Rys. 9. Podział trójkąta  $T$  na trapezy  $W_1, W_2, \dots, W_{m-1}$  i trójkąt  $W_m$ .

Można zauważyć, że po naniesieniu obu podziałów na wyjściowy trójkąt  $T$ , otrzymujemy dodatkowy podział na wielokąty (trapezy i trójkąty). Oznaczmy kolejno nowo powstałe wielokąty jako  $W_{ij}$ .

Przyjrzyjmy się wielokątom  $W_{ij}$  na rys. 10. Możemy powiedzieć, że wszystkie wielokąty  $W_{ij}$  zawierają się w kolejnych trapezach  $W_1, W_2, \dots, W_m$ . Stąd indeks  $i$  dla

wielokąta  $W_{ij}$  oznacza numer trapezu w którym się znajduje. Natomiast indeks  $j$  oznacza numer porządkowy, licząc od lewej strony. Ponieważ w każdym trapezie może być różna liczba wielokątów, stąd w oznaczeniach pojawia się  $n_i$ , co oznacza ostatni wielokąt w danym trapezie.

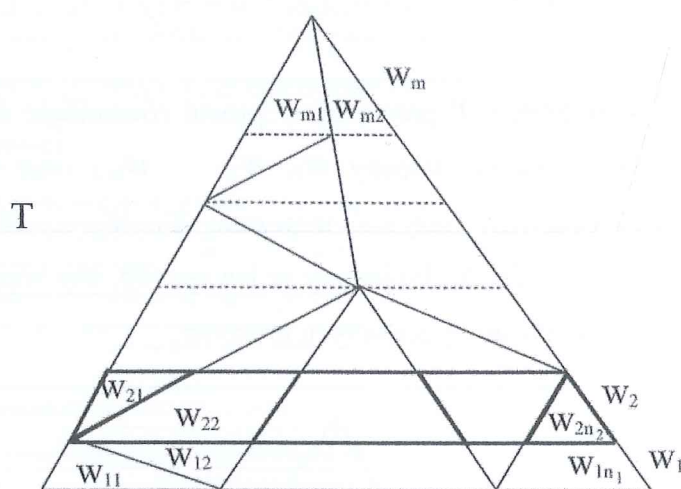
Zgodnie z tymi oznaczeniami dostajemy rozkłady:

$$W_1 = W_{11} + W_{12} + \dots + W_{1n_1}$$

$$W_2 = W_{21} + W_{22} + \dots + W_{2n_2}$$

...

$$W_m = W_{m1} + W_{m2} + \dots + W_{mn_m}$$



Rys. 10. Podział trójkąta  $T$  na trapezy  $W_1, W_2, \dots, W_{m-1}$  i trójkąt  $W_m$ . W trapezach zawierają się wielokąty (trójkąty i trapezy). Wyszczególniony trapez  $W_2 = W_{21} + W_{22} + \dots + W_{2n_2}$ .

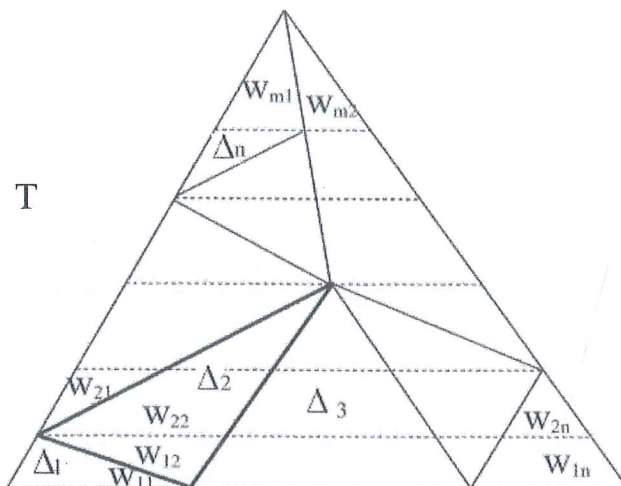
W kolejnych trapezach zawarte są trójkąty i trapezy mniejsze. Taki podział każdego z wielokątów  $W_i$  spełnia założenia Lematu 2.4. Na podstawie tego Lematu otrzymujemy, że suma poszczególnych wartości  $L(W_{ij})$  dla wielokątów zawartych w trapezie  $W_i$  równa jest  $L(W_i)$ , co zapisujemy  $L(W_i) = \sum_{j=1}^{n_i} L(W_{ij})$ .

Korzystając z Lematu 2.2, wiemy, że suma wartości przypisanych kolejnym trapezom  $W_i$  równa jest  $L(T)$ , czyli  $L(T) = \sum_{i=1}^m L(W_i)$ .

$$\text{Ponieważ } L(T) = \sum_{i=1}^m L(W_i), L(W_i) = \sum_{j=1}^{n_i} L(W_{ij}), \text{ stąd } L(T) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} L(W_{ij}).$$

ETAP 2:

Przyjrzyjmy się temu samemu podziałowi trójkąta  $T$  na trójkąty  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$  oraz wielokąty  $W_{ij}$  (rysunek 11). W każdym trójkącie  $\Delta_k$  znajdują się wielokąty  $W_{ij}$  (trapezy i trójkąty).



Rys. 11. Podział trójkąta  $T$  na trójkąty  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ . Wyszczególniony trójkąt zawiera wielokąty (trójkąty i trapezy).

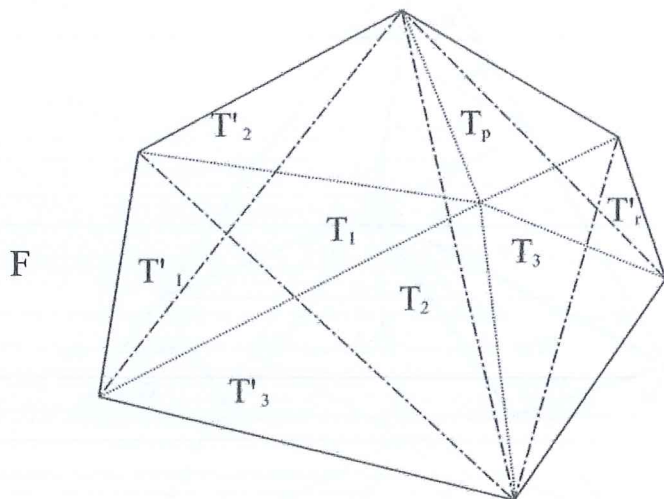
Suma wszystkich wartości  $L(W_{ij})$  dla wielokątów  $W_{ij}$ , zawierających się w poszczególnych trójkątach  $\Delta_k$ , równa jest zgodnie z Lematem 2.3 wartości  $L(\Delta_k)$ , czyli  $L(\Delta_k) = \sum_{W_{ij} \subset \Delta_k} L(W_{ij})$ .

Etap 3:

Korzystając z etapu 1 i 2, otrzymujemy  $\sum_{k=1}^n L(\Delta_k) = \sum_{k=1}^n \sum_{W_{ij} \subset \Delta_k} L(W_{ij}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} L(W_{ij}) = L(T)$ , czyli  $L(T) = \sum_{k=1}^n L(\Delta_k)$ , co kończy dowód Lematu 2.5.

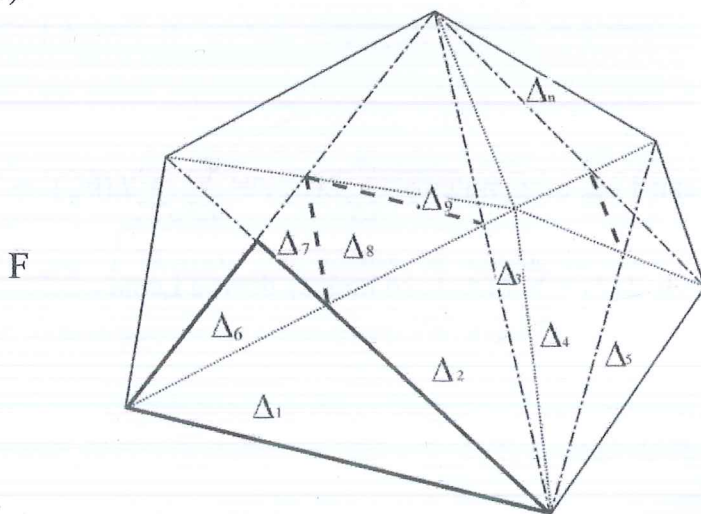
DOWÓD TWIERDZENIA 2

Możemy teraz przejść do realizacji głównego celu, czyli pokazania, że wielkość  $\sum_{i=1}^p L(T_i)$  nie zależy od podziału wielokąta  $F$  na trójkąty. Dokładniej pokażemy, że jeśli  $T_1, T_2, \dots, T_p$  oraz  $T'_1, T'_2, \dots, T'_r$  (rysunek 12) są dwoma podziałami wielokąta  $F$  na trójkąty, to  $\sum_{i=1}^p L(T_i) = \sum_{i=1}^r L(T'_i)$ .



Rys.12. Podział wielokąta  $F$  na trójkąty  $T_1, T_2, \dots, T_p$  oraz na trójkąty  $T'_1, T'_2, \dots, T'_r$ .

Na dany wielokąt  $F$  nanosimy podział na trójkąty  $T_1, T_2, \dots, T_p$  oraz podział na trójkąty  $T'_1, T'_2, \dots, T'_r$ . Podział ten stworzył podział wielokąta  $F$  na mniejsze wielokąty. Powstałe wielokąty dzielimy w dowolny sposób na trójkąty. W wyniku tych podziałów otrzymaliśmy podział wielokąta  $F$  na mniejsze trójkąty  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$  (rysunek 13).



Rys.13. Podział wielokąta  $F$  na trójkąty  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ .

Wielokąt  $F$  jest podzielony na trójkąty  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ . W każdym trójkącie z pierwszego podziału (podziału na trójkąty  $T_1, T_2, \dots, T_p$ ), znajduje się pewna liczba trójkątów  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ . Każdy trójkąt  $T_i$  można przedstawić jako  $T_i = \Delta_{j_1} + \dots + \Delta_{j_l}$ . Ponieważ  $\Delta_j$  nie są kolejnymi trójkątami, to wprowadzamy dodatkowy indeks.

Korzystając z Lematu 2.5, otrzymujemy  $L(T_i) = \sum_{\Delta_j \subset T_i} L(\Delta_j)$ . Sumując kolejne wartości

dla trójkątów  $T_i$ , otrzymujemy  $\sum_{i=1}^p L(T_i) = \sum_{k=1}^n L(\Delta_k)$ .

Podobnie postępujemy w przypadku drugiego podziału. Każdy trójkąt  $T'_i$  można przedstawić jako  $T'_i = \Delta_{h_1} + \dots + \Delta_{h_m}$ . Otrzymujemy  $L(T'_i) = \sum_{\Delta_h \subset T'_i} L(\Delta_h)$ . Sumując

kolejne wartości dla trójkątów  $T'_i$ , otrzymujemy  $\sum_{i=1}^r L(T'_i) = \sum_{k=1}^n L(\Delta_k)$ .

Ponieważ  $\sum_{i=1}^p L(T_i) = \sum_{k=1}^n L(\Delta_k)$  oraz  $\sum_{i=1}^r L(T'_i) = \sum_{k=1}^n L(\Delta_k)$ , to z przechodności

otrzymujemy  $\sum_{i=1}^p L(T_i) = \sum_{i=1}^r L(T'_i)$ , czyli wartości te są równe, niezależnie od podziału na trójkąty danego wielokąta, co kończy dowód Twierdzenia 2.

Wartość  $\sum_{i=1}^p L(T_i)$  przypiszemy wielokątowi  $F$  i będziemy nazywać ją polem wielokąta. Teraz możemy podać ścisłą definicję.

DEFINICJA:

Polem wielokąta  $W$  nazywamy wielkość  $L(W) := \sum_{i=1}^n L(T_i)$ , gdzie  $T_1, T_2, \dots, T_p$  jest dowolnym podziałem wielokąta  $W$  na niezachodzące na siebie trójkąty (mające rozłączne wnętrza), a  $L(T_i) = \frac{a_i \cdot h_i}{2}$  ( $a_i$  jest dowolnym bokiem trójkąta  $T_i$ , zaś  $h_i$  jest wysokością opuszczoną na ten bok).



## Rozdział 2 AKSJOMATY POLA

Często pojęcie pola wprowadza się za pomocą listy postulatów zwanych aksjomatami. Taki sposób wprowadzania nie przesądza o tym, czy postulowana funkcja przypisująca wielokątom ich pole w ogóle istnieje.

Zdefiniowana w poprzednim rozdziale funkcja  $L(F)$  posiada następujące własności, zwane aksjomatami teorii pola.

### 1. AKSJOMAT MONOTONICZNOŚCI:

Jeśli wielokąt  $F_1$  zawiera się w wielokącie  $F_2$ , to  $L(F_1) \leq L(F_2)$ .

DOWÓD:

Rozpatrzmy dwa przypadki.

- a) Jeśli  $F_1 = F_2$ , to oczywistym jest, że  $L(F_1) = L(F_2)$ , czyli teza jest spełniona.
- b) Jeśli  $F_1 \subsetneq F_2$  i  $F_1 \neq F_2$ , to istnieją niezachodzące na siebie i na  $F_1$  trójkąty  $T_1, T_2, \dots, T_n$  takie, że wielokąt  $F_2$  można przedstawić jako  $F_2 = F_1 + T_1 + T_2 + \dots + T_n$ . Jeśli  $F_1 = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_m$ , to  $F_2 = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_m + T_1 + T_2 + \dots + T_n$ , a wtedy  $L(F_2) = \sum_{i=1}^m L(\Delta_i) + \sum_{i=1}^n L(T_i) = L(F_1) + \sum_{i=1}^n L(T_i)$ . Ponieważ  $L(T_i) = \frac{a_i \cdot h_i}{2} > 0$ , to  $L(F_1) \leq L(F_2)$ .

### 2. AKSJOMAT ADDYTYWNOŚCI (SUMY):

Jeśli wielokąty  $F_1$  i  $F_2$  nie zachodzą na siebie (nie mają wspólnych punktów wewnętrznych), to istnieje zależność  $L(F_1 \cup F_2) = L(F_1) + L(F_2)$ .

DOWÓD:

Wielokąt  $F_1$  można przedstawić jako  $F_1 = T_1 + T_2 + \dots + T_p$ , a wielokąt  $F_2$  jako  $F_2 = T'_1 + T'_2 + \dots + T'_r$ , czyli  $F_1 \cup F_2 = T_1 + T_2 + \dots + T_p + T'_1 + T'_2 + \dots + T'_r$ .

Stąd  $L(F_1 + F_2) = \sum_{i=1}^p L(T_i) + \sum_{i=1}^r L(T'_i) = L(F_1) + L(F_2)$ .

### 3. AKSJOMAT PRYZYSTAWANIA:

Jeśli wielokąty  $F_1$  i  $F_2$  są przystające, to  $L(F_1) = L(F_2)$ .

Dowód:

Niech  $F_1 = T_1 + T_2 + \dots + T_p$ , czyli  $L(F_1) = L(T_1) + L(T_2) + \dots + L(T_p)$ . Skoro  $F_1 \equiv F_2$ , to  $F_2$  można podzielić na trójkąty  $T'_1, T'_2, \dots, T'_r$  takie, że  $T_1 \equiv T'_1$ ,  $T_2 \equiv T'_2, \dots, T_p \equiv T'_r$ . Ponieważ w trójkątach przystających odpowiadające boki i wysokości są równe, to  $L(T_i) = \frac{a_i \cdot h_i}{2} = L(T'_i)$ , czyli  $L(T_i) = L(T'_i)$ . Korzystając z tego, że  $L(T_i) = L(T'_i)$ , otrzymujemy  $L(F_2) = L(T'_1) + L(T'_2) + \dots + L(T'_r) = L(T_1) + L(T_2) + \dots + L(T_p) = L(F_1)$ .

### 4. AKSJOMAT JEDNOSTKI POLA:

Dla pewnego ustalonego kwadratu  $F_0$  o boku o długości 1, zachodzi równość  $L(F_0) = 1$ .

Dowód:

Dany jest kwadrat  $F_0$  o boku długości 1. Dokonując podziału kwadratu wzdłuż przekątnej, otrzymujemy dwa trójkąty prostokątne  $T_1$  i  $T_2$  o przyprostokątnych o długości 1. Otrzymujemy więc następujące równości:

$$L(F_0) = L(T_1 + T_2) = L(T_1) + L(T_2) = \frac{a_1 \cdot h_1}{2} + \frac{a_2 \cdot h_2}{2} = \frac{1 \cdot 1}{2} + \frac{1 \cdot 1}{2} = 1,$$

co należało pokazać.

### Rozdział 3

## ZDEFINIOWANIE OBJĘTOŚCI DLA WIELOŚCIANÓW ZA POMOCĄ CZWOROŚCIANÓW

Celem tego rozdziału jest zdefiniowanie objętości wielościanów. Aby osiągnąć ten cel, będziemy postępować w analogiczny sposób jak w rozdziale pierwszym, ale z uwzględnieniem specyfiki trójwymiarowej. Czworoscianom i innym wielościanom będziemy przyporządkowywać wielkość  $\Lambda$ , która wyznaczona jest przez wysokość i pole podstawy tych brył. W tym rozdziale pojęcie pola traktujemy już jako znane i dobrze określone.

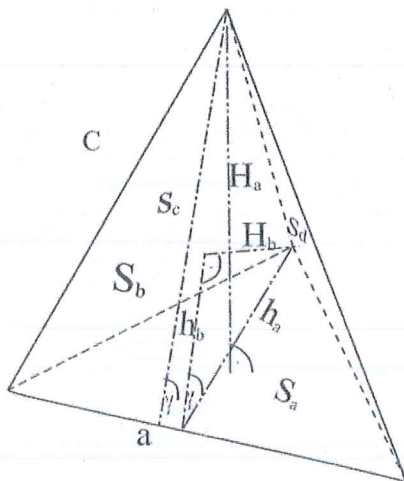
Wielościanem będziemy nazywać bryłę, którą można rozłożyć na skończoną liczbę niezachodzących na siebie czworoscianów (czworoscianów o rozłącznych wnętrzach).

Każdemu czworoscianowi przyporządkujemy liczbę  $\Lambda(C) = \frac{S \cdot H}{3}$ , gdzie  $S$  jest polem wybranej ściany,  $H$  jest wysokością opuszczoną na płaszczyznę tej ściany.

LEMAT 3.

Wartość  $\Lambda(C)$  jest niezależna od wyboru trójkąta, będącego podstawą tego czworoscianu oraz wysokości opuszczonej na ten trójkąt.

DOWÓD LEMATU 3.



Rys. 14. Czworoscian  $C$  o ścianach  $S_a, S_b, S_c, S_d$ .

Niech będzie dany czworościan  $C$  o ścianach  $S_a, S_b, S_c, S_d$  (rysunek nr 14). Wybierzmy dwa trójkąty o wspólnej krawędzi  $a$  (ściany czworościanu). Oznaczmy wysokości czworościanu opuszczone na wyznaczone ściany  $S_a, S_b$  jako  $H_a, H_b$ .

Dla trójkąta  $S_a = \frac{a \cdot h_a}{2}$ , a dla trójkąta  $S_b = \frac{a \cdot h_b}{2}$ . Pokażemy, że  $\frac{S_a \cdot H_a}{3} = \frac{S_b \cdot H_b}{3}$ .

Niech  $\gamma$  oznacza kąt między ścianami  $S_a, S_b$ . Przy takim oznaczeniu  $H_a = h_b \sin \gamma$ ,  $H_b = h_a \sin \gamma$ . Wtedy  $\frac{S_a \cdot H_a}{3} = \frac{a \cdot h_a}{2} \frac{H_a}{3} = \frac{a \cdot h_a \cdot H_a}{6} = \frac{a \cdot h_a \cdot h_b \sin \gamma}{6} =$

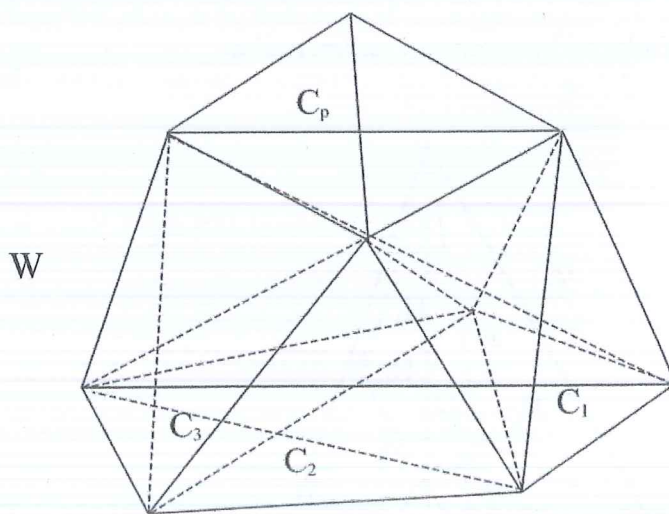
$$\frac{a \cdot h_b \cdot h_a \sin \gamma}{6} = \frac{a \cdot h_b \cdot H_b}{6} = \frac{a \cdot h_b}{2} \frac{H_b}{3} = \frac{S_b \cdot H_b}{3}.$$

Analogicznie można pokazać równość dla pozostałych ścian czworościanu. Stąd  $\frac{S_a \cdot H_a}{3} = \frac{S_b \cdot H_b}{3} = \frac{S_c \cdot H_c}{3} = \frac{S_d \cdot H_d}{3}$ , czyli wartość  $\Lambda(C)$  nie zależy od wyboru ściany i wysokości na nią opuszczonej.

Tak jak w przypadku wielokątów, tak i teraz, w przypadku wielościanów weźmiemy dowolny wielościan  $W$  i przedstawimy dwa jego podziały na czworościany.

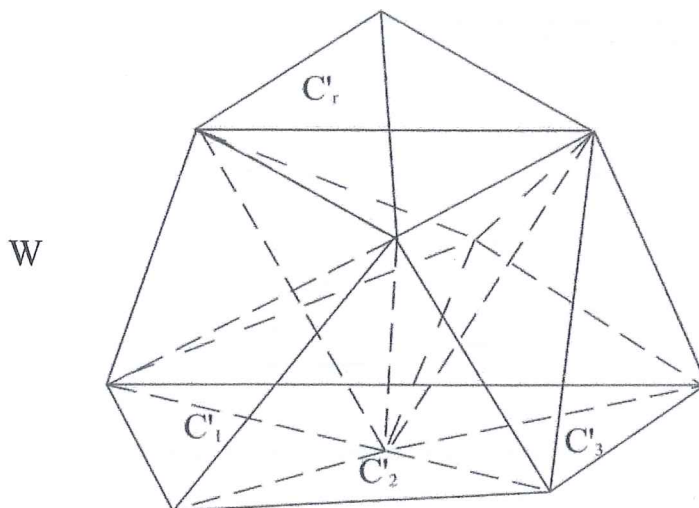
Niech czworościany pierwszego podziału będą oznaczone jako  $C_1, C_2, \dots, C_p$ .

Wtedy  $W = C_1 + C_2 + \dots + C_p$  (rysunek nr 15).



Rys. 15. Wielościan  $W$  podzielony na czworościany  $C_1, C_2, \dots, C_p$ .

Ten sam wielościan  $W$  możemy podzielić w inny sposób na czworosciany. Kolejne niezachodzące na siebie czworosciany oznaczmy jako  $C'_1, C'_2, \dots, C'_r$ . Stąd wielościan  $W$  można zapisać jako  $W = C'_1 + C'_2 + \dots + C'_r$  (rysunek 16).



Rys. 16. Wielościan  $W$  podzielony na czworosciany  $C'_1, C'_2, \dots, C'_r$ .

TWIERDZENIE 4.

Dany jest wielościan  $W$ . Niech  $C_1, C_2, \dots, C_p$  będzie dowolnym podziałem na czworosciany, a  $C'_1, C'_2, \dots, C'_r$  będzie innym podziałem wielościanu  $W$  na czworosciany. Wówczas

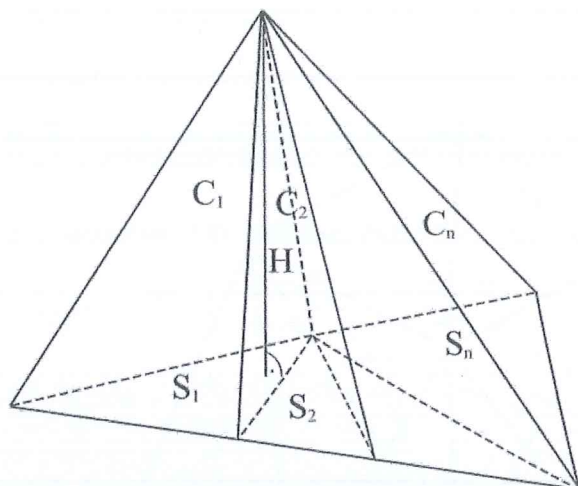
$$\sum_{i=1}^p \Lambda(C_i) = \sum_{i=1}^r \Lambda(C'_i).$$

Żeby udowodnić to twierdzenie, musimy wcześniej udowodnić kilka lematów.

LEMAT 4.1

Jeśli czworoscian  $C$  podzielimy na mniejsze czworosciany  $C_1, C_2, \dots, C_p$  płaszczyznami wychodzącymi z ustalonego wierzchołka czworoscianu  $C$ , to  $\Lambda(C) = \Lambda(C_1) + \Lambda(C_2) + \dots + \Lambda(C_p)$ .

DOWÓD LEMATU 4.1



Rys.17. Podział czworościanu \$C\$ na czworościany \$C\_1, C\_2, \dots, C\_n\$ płaszczyznami przechodzącymi przez wierzchołek czworościanu \$C\$.

Wszystkie czworościany \$C\_i\$ podziału mają taką samą wysokość \$H\$. Ponieważ suma pól podstaw \$S\_i\$ czworościanów \$C\_i\$ równa jest polu podstawy \$S\$ czworościanu \$C\$,

$$\text{to otrzymujemy } \Lambda(C) = \frac{S \cdot H}{3} = \frac{(S_1 + S_2 + \dots + S_n)H}{3} = \frac{S_1 \cdot H}{3} + \frac{S_2 \cdot H}{3} + \dots + \frac{S_n \cdot H}{3} =$$

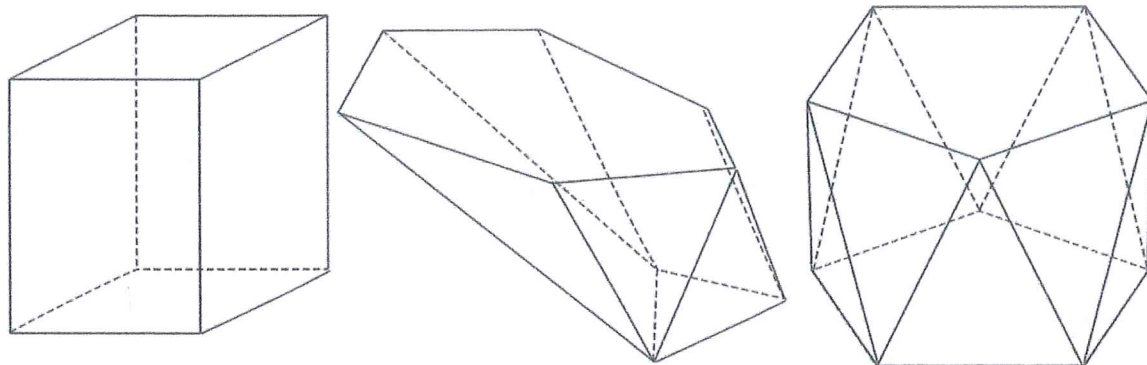
\$\Lambda(C\_1) + \Lambda(C\_2) + \dots + \Lambda(C\_n)\$, co chcieliśmy pokazać.

Zajmiemy się sytuacją, gdy czworościan \$C\$ jest podzielony płaszczyznami równoległymi do podstawy \$S\$ tego czworościanu. Efektem tego podziału są przyzmatoidy.

DEFINICJA:

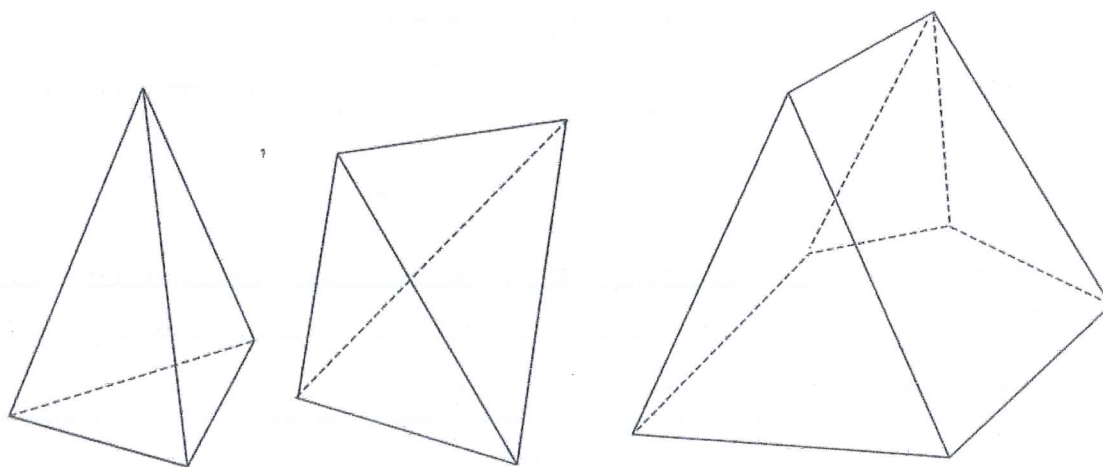
Pryzmatoid jest to wielościan, którego wszystkie wierzchołki leżą na dwóch płaszczyznach równoległych, z których każda zawiera choć trzy wierzchołki nie leżące na jednej prostej. Płaszczyzny te są płaszczyznami podstaw przyzmatoidu. Ściany leżące w płaszczyznach podstaw nazywa się podstawami przyzmatoidu.

Przykłady pryzmatoidów pokazane są na rysunku 18.



Rys.18. *Pryzmatoidy.*

Dla potrzeb dowodu pryzmatoidami będziemy także nazywać pryzmatoidy zdegenerowane, tzn. takie, które w płaszczyźnie podstawy mają jeden lub dwa wierzchołki (rysunek 19). Wszystkie wierzchołki pryzmatoidów leżą w jednej z dwóch równoległych płaszczyzn podstaw.



Rys.19. *Pryzmatoidy zdegenerowane, które mają w płaszczyźnie podstawy jeden lub dwa wierzchołki.*

Każdemu pryzmatoidowi  $P$  przyporządkujemy liczbę  $\Lambda(P) = \frac{(S_1 + 4D + S_2)H}{6}$ ,

gdzie  $S_1$  i  $S_2$  są polami podstaw,  $D$  oznacza pole przekroju pryzmatoidu płaszczyzną równoległą do podstaw i jednakowo od nich odległą, a  $H$  jest wysokością.

Gdy potraktujemy czworościan jako przyzmatoid, to poprzednio zdefiniowana wielkość  $\Lambda(C) = \frac{S \cdot H}{3}$  odpowiada wielkości zdefiniowanej dla przyzmatoidów.

LEMAT 4.2

Dla czworościanów wartości  $\Lambda(C) = \frac{S \cdot H}{3}$  oraz  $\Lambda(C) = \frac{(S_1 + 4D + S_2)H}{6}$  są równe.

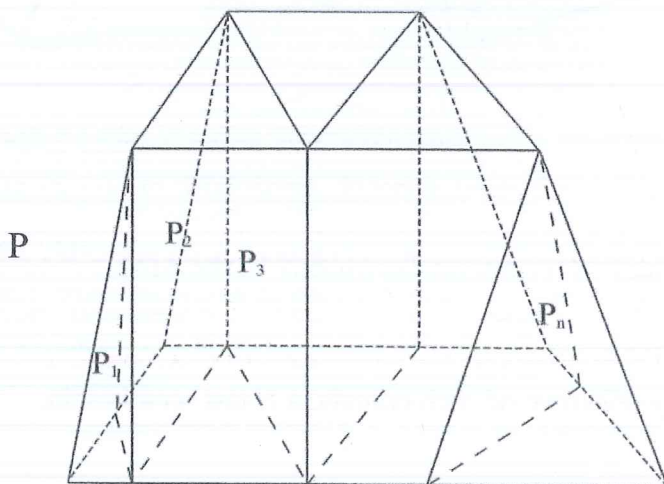
DOWÓD LEMATU 4.2

Ponieważ  $S_1$  stanowi dolną podstawę czworościanu, więc  $S_1 = S$ . Natomiast  $S_2$  jest wierzchołkiem czworościanu, czyli  $S_2 = 0$ . Wielkość  $D$  jest polem trójkąta powstałego w wyniku podzielenia czworościanu płaszczyzną prostopadłą do wysokości i równoodległą od podstawy i wierzchołka. Korzystając z podobieństwa, otrzymujemy

$$\frac{D}{S} = \left( \frac{\frac{1}{2}H}{H} \right)^2, \text{ czyli } D = \frac{1}{4}S. \text{ Podstawiając do wzoru otrzymujemy:}$$

$$\Lambda(C) = \frac{(S_1 + 4D + S_2)H}{6} = \frac{(S + 4\left(\frac{1}{4}S\right) + 0)H}{6} = \frac{2S \cdot H}{6} = \frac{S \cdot H}{3}, \text{ co kończy dowód.}$$

Weźmy pod uwagę przyzmatoid  $P$ , który jest podzielony płaszczyznami w taki sposób, że powstałe wielościany mają wierzchołki lub podstawy zawierające się w podstawach wyjściowego przyzmatoidu  $P$  (rysunek 20).



Rys.20. Przyzmatoid  $P$  podzielony płaszczyznami na przyzmatoidy  $P_1, P_2, \dots, P_n$ .



W wyniku podziału płaszczyznami pryzmatoidu  $P$  otrzymaliśmy wielościany, które stanowią zbiór pryzmatoidów (zdegenerowanych i właściwych).

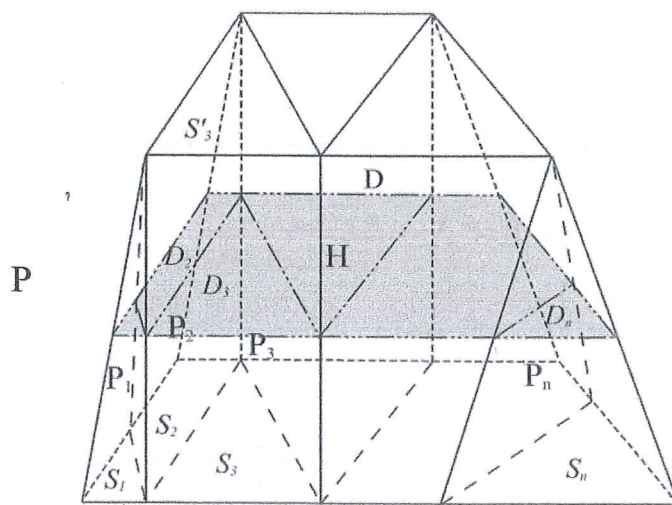
LEMAT 4.3

Jeśli pryzmatoid  $P$  jest podzielony płaszczyznami na pryzmatoidy  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , których wierzchołki zawierają się w podstawach wyjściowego pryzmatoidu,

$$\text{to } \Lambda(P) = \sum_{i=1}^n \Lambda(P_i).$$

DOWÓD LEMATU 4.3

Niech  $D$  oznacza płaszczyznę równoodległą od podstaw pryzmatoidu  $P$ . Równocześnie płaszczyzna  $D$  przecina każdy z pryzmatoidów  $P_1, P_2, \dots, P_n$  w połowie odległości między ich podstawami. Dla każdego pryzmatoidu  $P_i$  oznaczamy jako  $S_i$  jego podstawę dolną,  $S'_i$  podstawę górną, natomiast płaszczyznę równoodległą od  $S_i$  i  $S'_i$  jako  $D_i$  (rysunek 21).



Rys.21. Pryzmatoid  $P$  podzielony płaszczyznami na pryzmatoidy  $P_1, P_2, \dots, P_n$ .

$D$  jest równoodległa do podstaw pryzmatoidu  $P$ .

Wystarczy zauważyć, że pryzmatoidy  $P_1, P_2, \dots, P_n$  oraz pryzmatoid  $P$  mają tę samą wysokość  $H$ . Poza tym, suma pól podstaw  $S_i, S'_i$  oraz  $D_i$  równa jest polom  $S, S'$  i  $D$  wyjściowego pryzmatoidu  $P$ .

Otrzymujemy zatem ciąg równań:

$$\Lambda(P) = \frac{(S + 4D + S')H}{2} =$$

$$\frac{[(S_1 + S_2 + \dots + S_n) + 4(D_1 + D_2 + \dots + D_n) + (S'_1 + S'_2 + \dots + S'_n)]H}{2} =$$

$$\frac{(S_1 + 4D_1 + S'_1)H}{2} + \frac{(S_2 + 4D_2 + S'_2)H}{2} + \dots + \frac{(S_n + 4D_n + S'_n)H}{2} = \sum_{i=1}^n \Lambda(P_i),$$

co kończy dowód Lematu 4.3.

Dowolny czworościan  $C$  możemy podzielić płaszczyznami, wzajemnie równoległymi w taki sposób, że powstaną przymatoidy  $P_1, P_2, \dots, P_n$ . Pokażemy, że suma  $\Lambda(P_i)$  jest równa  $\Lambda(C)$ . Podział czworościanu płaszczyznami równoległymi wymaga rozpatrzenia 5 przypadków (efektów podziału). Pokażemy, że  $\Lambda(C) = \sum_{i=1}^n \Lambda(P_i)$  dla każdego z przypadków.

#### LEMAT 4.4

Jeśli czworościan  $C$  jest podzielony płaszczyznami równoległymi tak, że powstaną przymatoidy  $P_1, P_2, \dots, P_n$  to  $\Lambda(C) = \sum_{i=1}^n \Lambda(P_i)$ .

#### DOWÓD LEMATU 4.4

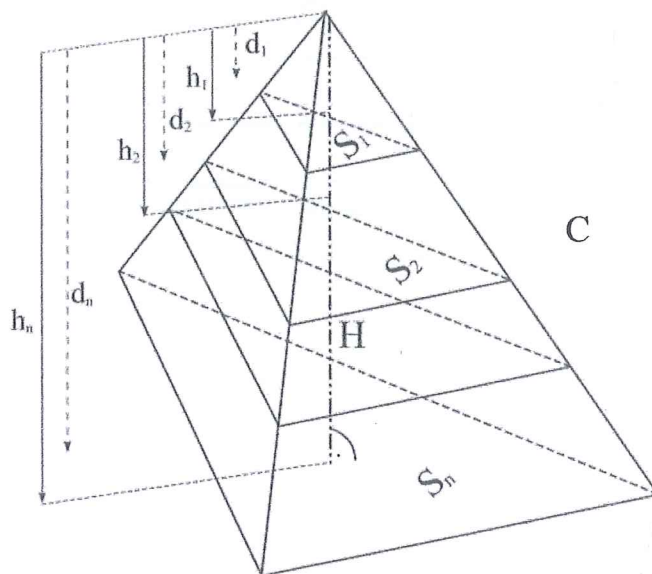
##### □ 4.4.1

Czworościan  $C$  jest podzielony płaszczyznami równoległymi do podstawy czworościanu.

Przyjmijmy zgodne z rysunkiem 19 oznaczenia:

- $P_1, P_2, \dots, P_n$  – kolejne przymatoidy;
- $S_1, S_2, \dots, S_n$  – pola powierzchni powstałe przez przecięcie czworościanu płaszczyznami; podstawy kolejnych przymatoidów;
- $D_1, D_2, \dots, D_n$  – pola powierzchni powstałe przez przecięcie przymatoidów  $P_1, P_2, \dots, P_n$  płaszczyznami równoległymi od ich podstaw;

- $h_1, (h_2 - h_1), (h_3 - h_2), \dots, (h_n - h_{n-1})$  – wysokości pryzmatoidów;



Rys.22. Czworoscian  $C$  podzielony na pryzmatoidy płaszczyznami równoległymi do podstawy czworoscianu.

Korzystając z podobieństwa, otrzymujemy  $\frac{S_i}{S_n} = \left(\frac{h_i}{h_n}\right)^2$ , czyli  $S_i = S_n \left(\frac{h_i}{h_n}\right)^2$ , gdzie

$i=1, \dots, n$ . Dla kolejnych wartości  $d$  otrzymujemy  $d_1 = \frac{h_1}{2}$  oraz  $d_i = \frac{h_{i-1} + h_i}{2}$ , dla  $i=2, \dots, n$ .

Wyznaczając wartości  $D_i$  otrzymujemy  $D_1 = S_n \left(\frac{d_1}{h_n}\right)^2 = S_n \left(\frac{h_1}{2h_n}\right)^2$  oraz  $D_i = S_n \left(\frac{d_i}{h_n}\right)^2 =$

$$S_n \left(\frac{h_{i-1} + h_i}{2h_n}\right)^2 \text{ dla } i=2, \dots, n.$$

Korzystając z wyprowadzonych oznaczeń, możemy dla każdego pryzmatoidu  $P_i$

wyznaczyć  $\Lambda(P_i) = \frac{1}{6}(S_{i-1} + 4D_i + S_i)(h_i - h_{i-1})$ .

$$\sum_{i=1}^n \Lambda(P_i) = \frac{(4D_1 + S_1)h_1}{6} + \frac{(S_1 + 4D_2 + S_2)(h_2 - h_1)}{6} + \dots + \frac{(S_{i-1} + 4D_i + S_i)(h_i - h_{i-1})}{6} + \dots + \frac{(S_{n-1} + 4D_n + S_n)(h_n - h_{n-1})}{6} =$$

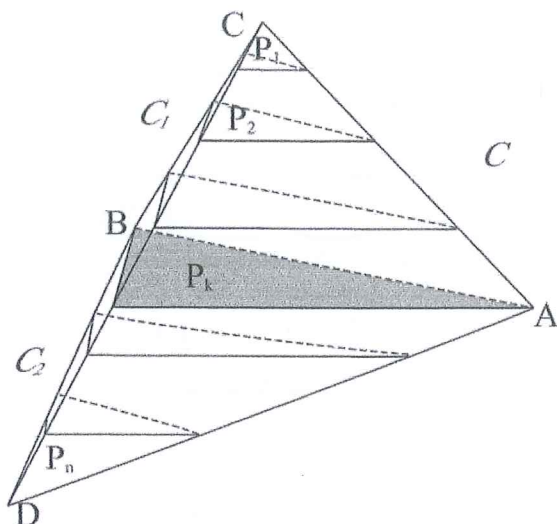
$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{6} \left( S_n \left( \frac{h_1}{h_n} \right)^2 + 4S_n \left( \frac{h_1}{2h_n} \right)^2 \right) h_1 + \frac{1}{6} \left( S_n \left( \frac{h_1}{h_n} \right)^2 + 4S_n \left( \frac{h_1+h_2}{2h_n} \right)^2 + S_n \left( \frac{h_2}{h_n} \right)^2 \right) (h_2 - h_1) + \dots + \\
 & \frac{1}{6} \left( S_n \left( \frac{h_{i-1}}{h_n} \right)^2 + 4S_n \left( \frac{h_{i-1}+h_i}{2h_n} \right)^2 + S_n \left( \frac{h_i}{h_n} \right)^2 \right) (h_i - h_{i-1}) + \dots + \\
 & \frac{1}{6} \left( S_n \left( \frac{h_{n-1}}{h_n} \right)^2 + 4S_n \left( \frac{h_{n-1}+h_n}{2h_n} \right)^2 + S_n \right) (h_n - h_{n-1}) = \\
 & \frac{S_n}{6h_n^2} \{ 2h_1^3 + [h_1^2 + (h_1+h_2)^2 + h_2^2] (h_2 - h_1) + \dots + [h_{i-1}^2 + (h_{i-1}+h_i)^2 + h_i^2] (h_i - h_{i-1}) + \dots + \\
 & [h_{n-1}^2 + (h_{n-1}+h_n)^2 + h_n^2] (h_n - h_{n-1}) \} = \\
 & \frac{S_n}{6h_n^2} \{ 2h_1^3 + [2h_1^2 + 2h_1h_2 + 2h_2^2] (h_2 - h_1) + \dots + [2h_{i-1}^2 + 2h_{i-1}h_i + 2h_i^2] (h_i - h_{i-1}) + \dots + \\
 & [2h_{n-1}^2 + 2h_{n-1}h_n + 2h_n^2] (h_n - h_{n-1}) \} = \\
 & \frac{S_n}{3h_n^2} (h_1^3 + h_1^2h_2 + h_1h_2^2 + h_2^3 - h_1^3 - h_1^2h_2 - h_2^2h_1 + \dots + h_{i-1}^2h_i + h_{i-1}h_i^2 + h_i^3 - h_{i-1}^3 - h_{i-1}^2h_i - h_i^2h_{i-1} + \dots + \\
 & h_{n-1}^2h_n + h_{n-1}h_n^2 + h_n^3 - h_{n-1}^3 - h_{n-1}^2h_n - h_n^2h_{n-1}) = \frac{S_n}{3h_n^2} h_n^3 = \frac{1}{3} S_n h_n
 \end{aligned}$$

Ponieważ  $S_n = S$  a  $h_n = H$ , to  $\frac{1}{3} S_n h_n = \frac{1}{3} SH = \Lambda(C)$ , co kończy dowód Lematu 4.3.

□ 4.4.2

Czworościan  $C$  został podzielony płaszczyznami równoległymi, w taki sposób, że dwa wierzchołki czworościanu zawierają się w jednej płaszczyźnie  $\Pi$  podziału (wierzchołki  $A$  i  $B$  na rysunku 23), a pozostałe dwa znajdują się po przeciwnych stronach płaszczyzny  $\Pi$ . W wyniku tego podziału powstaną przyzmatoidy  $P_1, P_2, \dots, P_n$ . Można w łatwy sposób, korzystając z wcześniej udowodnionych lematów, pokazać,

że  $\Lambda(C) = \sum_{i=1}^n \Lambda(P_i)$ .



Rys.23. Czworoscian  $C$  podzielony na przyrnatoidy  $P_i$  płaszczynami równoległymi do siebie. zawiera dwa wierzchołki czworoscianu.

Wystarczy zauważyć, że płaszczyna na której leżą dwa spośród wierzchołków (wierzchołki  $A$  i  $B$  na rysunku) dzieli  $C$  na dwa czworosciany  $C_1$  oraz  $C_2$  o wspólnej podstawie. W  $C_1$  zawarte są przyrnatoidy  $P_1, \dots, P_k$ , zaś w  $C_2$  przyrnatoidy  $P_{k+1}, \dots, P_n$ . Z dowodu dla przypadku 4.3.1 otrzymujemy równości  $\Lambda(C_1) = \sum_{i=1}^k \Lambda(P_i)$  oraz

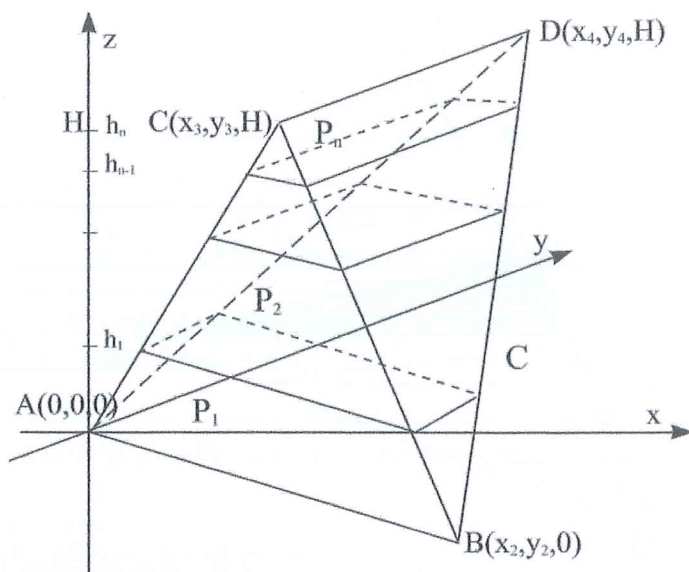
$\Lambda(C_2) = \sum_{i=k+1}^n \Lambda(P_i)$ . Za pomocą Lematu 4.1 otrzymujemy  $\Lambda(C) = \Lambda(C_1) + \Lambda(C_2)$ .

Korzystając z tych równości, dostajemy  $\Lambda(C) = \Lambda(C_1) + \Lambda(C_2) = \sum_{i=1}^k \Lambda(P_i) + \sum_{i=k+1}^n \Lambda(P_i) =$

$\sum_{i=1}^n \Lambda(P_i)$ , czyli  $\Lambda(C) = \sum_{i=1}^n \Lambda(P_i)$ , co należało pokazać.

□ 4.4.3

Czworoscian  $C$  został podzielony płaszczynami, które są równoległe do dwóch przeciwnych krawędzi. Na rysunku 24 są krawędzie  $AB$  i  $CD$ . W wyniku takiego podziału powstały przyrnatoidy  $P_1, \dots, P_n$ .



Rys.24. Czworoscian  $C$  podzielony na pryzmatoidy  $P_i$  płaszczyznami równoległymi do siebie.

Wierzchołki  $A$  i  $B$  leżą na płaszczyźnie  $z=0$ , a wierzchołki  $C$  i  $D$  leżą na płaszczyźnie  $z=H$ .

Dla ułatwienia rachunków czworoscian  $C$  umieszczamy w układzie współrzędnych. Wierzchołki  $A$  i  $B$  zwierają się w płaszczyźnie  $z=0$ , a wierzchołki  $C$  i  $D$  w płaszczyźnie  $z=H$ . Korzystając z analizy wektorowej w łatwy sposób możemy uzyskać pole powierzchni podstawy oraz długość wysokości opuszczonej na tę podstawę. Jeśli wybierzemy trójkąt  $CAB$  jako podstawę, to pole tego trójkąta otrzymamy ze wzoru  $S = \frac{1}{2} |\vec{AC} \times \vec{AB}|$ , a wysokość stanowi odległość punktu  $D$

do płaszczyzny trójkąta  $CAB$ . Stąd wysokość czworoscianu możemy obliczyć

za pomocą wzoru  $H_s = \frac{|Ax_4 + By_4 + CH + E|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ , gdzie  $D=[x_4, y_4, H]$ ,  $A, B, C$

to współczynniki równania płaszczyzny  $\Pi$ , w której zawiera się trójkąt  $CAB$ .

Wektor normalny płaszczyzny  $\Pi$  wyznaczamy z iloczynu wektorowego wektorów  $\vec{AC}$  i  $\vec{AB}$ , czego wynikiem jest  $\vec{AC} \times \vec{AB} = [x_3, y_3, H] \times [x_2, y_2, 0] = [-y_2H, x_2H, x_3y_2 - x_2y_3]$ . Ponieważ punkt  $A(0,0,0)$  należy do płaszczyzny  $\Pi$ , to równanie płaszczyzny ma postać  $(-y_2H)x + (x_2H)y + (x_3y_2 - x_2y_3)z = 0$ .

Podstawiając dane do wzoru, otrzymujemy

$$H_s = \frac{|Ax_4 + By_4 + CH + E|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|(-y_2H)x_4 + (x_2H)y_4 + (x_3y_2 - x_2y_3)H|}{\sqrt{(-y_2H)^2 + (x_2H)^2 + (x_3y_2 - x_2y_3)^2}}$$

Pozostała do obliczenia wielkość  $S$ , zgodnie ze wzorem  $S = \frac{1}{2} |\vec{AC} \times \vec{AB}|$ , wynosi

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{(-y_2 H)^2 + (x_2 H)^2 + (x_3 y_2 - x_2 y_3)^2}.$$

Uzyskaliśmy już wartości, potrzebne do obliczenia wartości

$$\begin{aligned} \Lambda(C) &= \frac{1}{3} S H_s = \frac{1}{3} \frac{1}{2} \sqrt{(-y_2 H)^2 + (x_2 H)^2 + (x_3 y_2 - x_2 y_3)^2} \frac{|(-y_2 H)x_4 + (x_2 H)y_4 + (x_3 y_2 - x_2 y_3)H|}{\sqrt{(-y_2 H)^2 + (x_2 H)^2 + (x_3 y_2 - x_2 y_3)^2}} \\ &= \frac{1}{6} H |-y_2 x_4 + x_2 y_4 + x_3 y_2 - x_2 y_3|. \end{aligned}$$

Czworościan  $C$  dzielimy płaszczyznami  $z=h_1, \dots, z=h_{n-1}$ , które są podstawami kolejnych przyzmatoidów oraz płaszczyznami  $z = \frac{h_1 + h_2}{2}, \dots, z = \frac{h_{n-1} + H}{2}$ , które są równoodległe od podstaw przyzmatoidów. Wyznamy punkty przecięcia kolejnych płaszczyzn z prostymi zawierającymi krawędzie czworościanu. Wyprowadzimy ogólny wzór – podział płaszczyzną  $z=h$ , gdzie  $h$  możemy utożsamić z wielkościami  $h_1, \frac{h_1 + h_2}{2}, h_2, \frac{h_2 + h_3}{2}, \dots, h_{n-1}, \frac{h_{n-1} + H}{2}$ . Uzyskane punkty (3 spośród 4) mają współrzędne:

$$Q_{AC}^h = \left[ \frac{hx_3}{H}, \frac{hy_3}{H}, h \right], Q_{AD}^h = \left[ \frac{hx_4}{H}, \frac{hy_4}{H}, h \right], Q_{BC}^h = \left[ x_2 + \frac{h}{H}(x_3 - x_2), y_2 + \frac{h}{H}(y_3 - y_2), h \right].$$

Podział czworościanu płaszczyznami spowodował powstanie przyzmatoidów, których podstawami są równoległoboki, a wysokościami odległości pomiędzy kolejnymi płaszczyznami. Mając wyznaczone punkty w łatwy sposób możemy wyznaczyć pola kolejnych równoległoboków, a mianowicie

$$\begin{aligned} S(h_i) &= \left| \vec{Q_{AC}^h Q_{BC}^h} \times \vec{Q_{AC}^h Q_{AD}^h} \right| = \\ &= \left[ x_2 + \frac{h_i}{H}(x_3 - x_2) - \frac{h_i x_3}{H}, y_2 + \frac{h_i}{H}(y_3 - y_2) - \frac{h_i y_3}{H}, 0 \right] \times \left[ \frac{h_i x_4}{H} - \frac{h_i x_3}{H}, \frac{h_i y_4}{H} - \frac{h_i y_3}{H}, 0 \right] = \\ &= \frac{h_i(H - z_i)}{H^2} |-y_2 x_4 + x_2 y_4 + x_3 y_2 - x_2 y_3|. \end{aligned}$$

Korzystając z uzyskanych wielkości, możemy dla każdego przymatoidu  $P_i$  wyznaczyć  $\Lambda(P_i)$ . A mianowicie

$$\Lambda(P_i) = \frac{1}{6}(S_{i-1} + 4D_i + S_i)(h_i - h_{i-1}) = \frac{1}{6} \left( S(h_{i-1}) + 4S\left(\frac{h_{i-1} + h_i}{2}\right) + S(h_i) \right) (h_i - h_{i-1}).$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \Lambda(P_i) &= \frac{1}{6} \left( S(h_0) + 4S\left(\frac{h_0 + h_1}{2}\right) + S(h_1) \right) (h_1 - h_0) + \frac{1}{6} \left( S(h_1) + 4S\left(\frac{h_1 + h_2}{2}\right) + S(h_2) \right) (h_2 - h_1) + \dots + \\ & \frac{1}{6} \left( S(h_{i-1}) + 4S\left(\frac{h_{i-1} + h_i}{2}\right) + S(h_i) \right) (h_i - h_{i-1}) + \dots + \frac{1}{6} \left( S(h_{n-1}) + 4S\left(\frac{h_{n-1} + h_n}{2}\right) + S(h_n) \right) (h_n - h_{n-1}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{|-y_2x_4 + x_2y_4 + x_3y_2 - x_2y_2|}{6} \\ & \left[ \left( \frac{h_0(H-h_0)}{H^2} + 4 \frac{\frac{h_0+h_1}{2} \left( H - \frac{h_0+h_1}{2} \right)}{H^2} + \frac{h_1(H-h_1)}{H^2} \right) (h_1 - h_0) + \right. \\ & \left( \frac{h_1(H-h_1)}{H^2} + 4 \frac{\frac{h_1+h_2}{2} \left( H - \frac{h_1+h_2}{2} \right)}{H^2} + \frac{h_2(H-h_2)}{H^2} \right) (h_2 - h_1) + \dots + \\ & \left( \frac{h_{i-1}(H-h_{i-1})}{H^2} + 4 \frac{\frac{h_{i-1}+h_i}{2} \left( H - \frac{h_{i-1}+h_i}{2} \right)}{H^2} + \frac{h_i(H-h_i)}{H^2} \right) (h_i - h_{i-1}) + \dots + \\ & \left. \left( \frac{h_{n-1}(H-h_{n-1})}{H^2} + 4 \frac{\frac{h_{n-1}+h_n}{2} \left( H - \frac{h_{n-1}+h_n}{2} \right)}{H^2} + \frac{h_n(H-h_n)}{H^2} \right) (h_n - h_{n-1}) \right] \end{aligned}$$

Ponieważ  $h_0=0$ ,  $h_n=H$ , to otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \Lambda(P_i) &= \frac{|-y_2x_4 + x_2y_4 + x_3y_2 - x_2y_2|}{6H^2} \{ [h_1(2H-h_1) + h_1(H-h_1)] h_1 + \dots + \\ & [h_1(H-h_1) + (h_1+h_2)(2H-h_1-h_2) + h_2(H-h_2)] (h_2-h_1) + \dots + \\ & [h_{i-1}(H-h_{i-1}) + (h_{i-1}+h_i)(2H-h_{i-1}-h_i) + h_i(H-h_i)] (h_i-h_{i-1}) + \dots + \\ & [h_{n-1}(H-h_{n-1}) + (h_{n-1}+H)(H-h_{n-1})] (H-h_{n-1}) \}. \end{aligned}$$



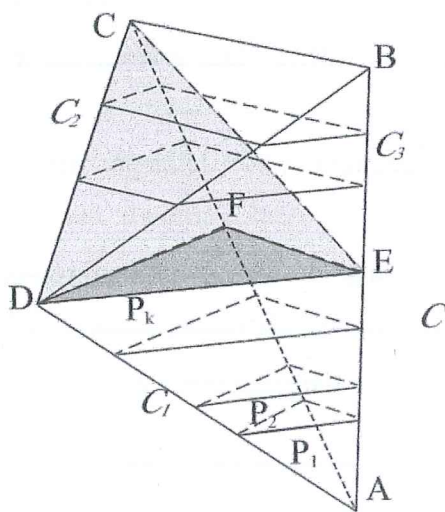
Po wymnożeniu i zredukowaniu wyrazów podobnych (oczywiste przekształcenia pomijamy) otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^n \Lambda(P_i) = \frac{|-y_2x_4 + x_2y_4 + x_3y_2 - x_2y_2|}{6H^2} H^3 = \frac{1}{6} H |-y_2x_4 + x_2y_4 + x_3y_2 - x_2y_2| = \Lambda(C),$$

co kończy dowód przypadku 4.4.3.

□ 4.4.4

Wierzchołki  $C$  i  $B$  czworościanu  $C$  zawierają się w płaszczyźnie, równoległej do płaszczyzn podziału czworościanu. Pozostałe dwa wierzchołki znajdują się po jednej ze stron płaszczyzny zawierającej krawędź  $CB$ , a krawędź  $AD$  nie jest równoległa do płaszczyzn podziału. Sytuacja taka została przedstawiona na rysunku 25. W wyniku tego podziału powstaną rozłączne przyrmatoidy  $P_1, P_2, \dots, P_n$ .



Rys.25. Czwościan  $C$  podzielony na przyrmatoidy  $P_i$  płaszczyznami równoległymi do siebie.

Wierzchołki  $C$  i  $B$  leżą na jednej z płaszczyzn podziału.

Jedną z płaszczyzn przecinamy tak czwościan, aby zawierała wierzchołek  $D$ . Zauważmy, że dzięki takiemu przecięciu płaszczyzną, otrzymaliśmy czwościan  $AFDE$  oraz wielościan  $BCDEF$ . Czwościan  $AFDE$ , przecinają płaszczyzny równoległe do podstawy tego czwościanu, tworząc przyrmatoidy  $P_1, P_2, \dots, P_k$ . Korzystając z rozważanego wcześniej przypadku 4.4.1 (podziału czwościanu

płaszczyznami równoległymi do podstawy), otrzymujemy  $\Lambda(C_1) = \sum_{i=1}^k \Lambda(P_i)$ .

Wielościan  $BCDEF$  dzielimy płaszczyzną, przechodzącą przez wierzchołki  $DEC$ , czego wynikiem są powstałe czworościany  $DEFC$  ( $C_2$ ),  $DEBC$  ( $C_3$ ) oraz podział pryzmatoidów  $P_1, P_2, \dots, P_k$ . Pryzmatoidy zawarte w  $C_2$  oznaczamy jako  $P'_{k+1}, P'_{k+2}, \dots, P'_n$ , natomiast pryzmatoidy zawarte w  $C_3$  jako  $P''_{k+1}, P''_{k+2}, \dots, P''_n$ . Ponieważ  $C_2$  jest czworościanem, którego podstawa jest równoległa do płaszczyzn podziału, to otrzymujemy  $\Lambda(C_2) = \sum_{i=k+1}^n \Lambda(P'_i)$  (przypadek 4.4.1). Natomiast podział czworościanu

$C_3$  na pryzmatoidy jest analogiczny do przykładu 4.4.3, stąd  $\Lambda(C_3) = \sum_{i=k+1}^n \Lambda(P''_i)$ .

Ponieważ obie płaszczyzny (przechodząca przez punkty  $DFE$  oraz płaszczyzna przechodząca przez punkty  $DEC$ ) przecinają czworościan  $C$  w wierzchołku  $D$ , to spełniają założenia Lematu 4.1, na podstawie którego otrzymujemy  $\Lambda(C) = \Lambda(C_1) + \Lambda(C_2) + \Lambda(C_3)$ . Korzystając z tych równości, dostajemy  $\Lambda(C) = \Lambda(C_1) + \Lambda(C_2) +$

$\Lambda(C_3) = \sum_{i=1}^k \Lambda(P_i) + \sum_{i=k+1}^n \Lambda(P'_i) + \sum_{i=k+1}^n \Lambda(P''_i)$ . Dla  $i=k+1, \dots, n$  otrzymujemy  $\Lambda(P'_i) +$

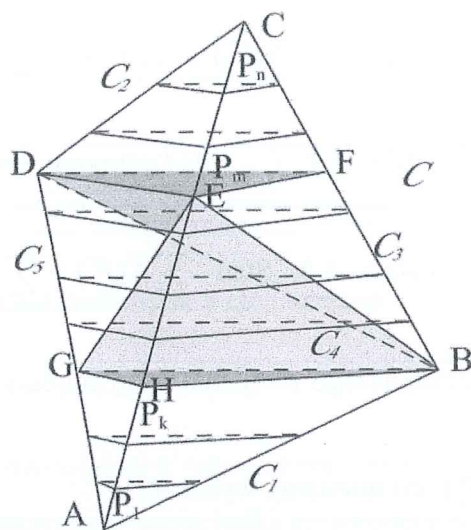
$\Lambda(P''_i) = \Lambda(P_i)$ , zgodnie z Lematem 4.3. Dlatego  $\Lambda(C_2) + \Lambda(C_3) = \sum_{i=k+1}^n \Lambda(P'_i)$

$+ \sum_{i=k+1}^n \Lambda(P''_i) = \sum_{i=k+1}^n \Lambda(P_i)$ . Podstawiając do wcześniejszego równania otrzymujemy  $\Lambda(C)$

$= \sum_{i=1}^k \Lambda(P_i) + \sum_{i=k+1}^n \Lambda(P_i) = \sum_{i=1}^n \Lambda(P_i)$ , co należało pokazać.

#### □ 4.4.5

Ostatni rozpatrywany przypadek, polega na tym, że żadna z krawędzi czworościanu  $C$  nie jest równoległa do płaszczyzn podziału czworościanu (rysunek 26).



Rys.26. Czworoscian  $C$  podzielony na przyrnatoidy  $P_i$  płaszczyznami równoległymi do siebie.  
Każda krawędź czworoscianu jest nierównoległa do płaszczyzn podziału.

W tym przypadku również podzielimy czworoscian  $C$  dodatkowymi płaszczyznami, aby doprowadzić do znanych nam już przypadków. Podstawowy podział czworoscianu, to podział płaszczyznami równoległymi na przyrnatoidy  $P_1, P_2, \dots, P_n$ . Płaszczyzny zawierające wierzchołki  $B, D$  czworoscianu  $ABCD$  ( $C$ ) podzieliły czworoscian na dwa czworosciany mniejsze:  $ABGH$  ( $C_1$ ),  $DEFC$  ( $C_2$ ) oraz wieloscian  $GHBDEF$ . Następnie dzielimy wieloscian dwoma płaszczyznami w taki sposób, że powstają czworosciany  $FDEB$  ( $C_3$ ) i  $HBGE$  ( $C_4$ ), odpowiadające przypadkowi 4.4.1 oraz czworoscian  $GEDB$  ( $C_5$ ) analogiczny do sytuacji 4.4.3. Czworoscian  $C_1$  zawiera przyrnatoidy  $P_1, P_2, \dots, P_k$ , czyli  $\Lambda(C_1) = \sum_{i=1}^k \Lambda(P_i)$ , a czworoscian  $C_2$  zawiera

przyrnatoidy  $P_m, P_{m+1}, \dots, P_n$ , czyli  $\Lambda(C_2) = \sum_{i=m}^n \Lambda(P_i)$ . Ponieważ podział czworoscianu

płaszczyznami dodatkowymi, podzielił przyrnatoidy  $P_{k+1}, P_{k+2}, \dots, P_{m-1}$ , na mniejsze przyrnatoidy to dla czworoscianów  $C_3, C_4, C_5$ , możemy kolejno zapisać:

$$\Lambda(C_3) = \sum_{i=k+1}^{m-1} \Lambda(P_i'), \quad \Lambda(C_4) = \sum_{i=k+1}^{m-1} \Lambda(P_i''), \quad \Lambda(C_5) = \sum_{i=k+1}^{m-1} \Lambda(P_i''').$$

Dodając do siebie czworosciany  $C_2$  i  $C_3$ , otrzymujemy czworoscian  $C'$ , gdzie

$$\Lambda(C') = \Lambda(C_2) + \Lambda(C_3) = \sum_{i=m}^n \Lambda(P_i) + \sum_{i=k+1}^{m-1} \Lambda(P_i').$$

Analizując podział czworoscianu  $C$  na czworosciany  $C_1, C', C_4, C_5$  możemy skorzystać z Lematu 4.1 (podział czworoscianu

na czworościany płaszczyznami przechodzącymi przez wierzchołek czworościanu

$$\text{wyjściowego) } \Lambda(C) = \Lambda(C_1) + \Lambda(C') + \Lambda(C_4) + \Lambda(C_5) = \sum_{i=1}^k \Lambda(P_i) + \sum_{i=m}^n \Lambda(P_i) +$$

$$\sum_{i=k+1}^{m-1} \Lambda(P_i') + \sum_{i=k+1}^{m-1} \Lambda(P_i'') + \sum_{i=k+1}^{m-1} \Lambda(P_i'''). \text{ Dla } i=k+1, \dots, m-1 \text{ otrzymujemy } \Lambda(P_i') + \Lambda(P_i'') +$$

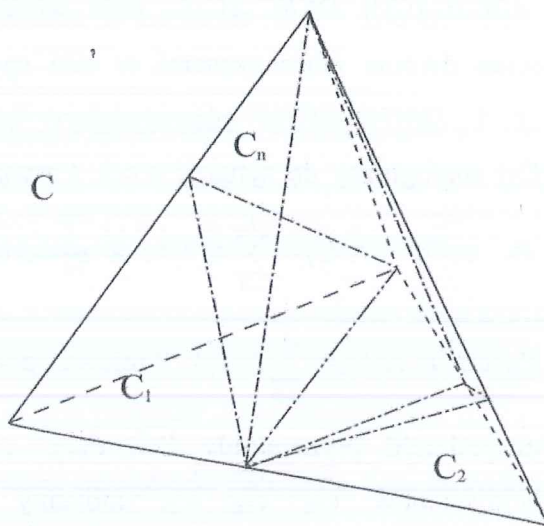
$$\Lambda(P_i''') = \Lambda(P_i), \text{ zgodnie z Lematem 4.3. Stąd } \sum_{i=k+1}^{m-1} \Lambda(P_i') + \sum_{i=k+1}^{m-1} \Lambda(P_i'') + \sum_{i=k+1}^{m-1} \Lambda(P_i''') =$$

$$\sum_{i=k+1}^{m-1} \Lambda(P_i). \text{ Podstawiając do wcześniejszego równania otrzymujemy } \Lambda(C) = \sum_{i=1}^k \Lambda(P_i) +$$

$$\sum_{i=m}^n \Lambda(P_i) + \sum_{i=k+1}^{m-1} \Lambda(P_i) = \sum_{i=1}^n \Lambda(P_i), \text{ co mieliśmy wykazać.}$$

Dzięki rozpatrzeniu wszystkich przypadków, udowodniliśmy Lemat 4.4.

Rozważmy taką sytuację, kiedy mamy czworościan  $C$ , który w dowolny sposób jest podzielony na mniejsze czworościany  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . Przykładem takiego podziału, na którym będzie ilustrowane ogólne rozumowanie jest przykład z rysunku 27. Pokażemy, że suma wartości  $\Lambda(C_1), \Lambda(C_2), \dots, \Lambda(C_n)$  równa jest  $\Lambda(C)$ .



Rys.27. Czwościan  $C$  podzielony na czwościany  $C_1, C_2, \dots, C_n$ .

LEMAT 4.6

Jeśli czworościan  $C$  podzielimy w dowolny sposób na czworościany  $C_1, C_2, \dots, C_n$

to  $\Lambda(C) = \sum_{i=1}^n \Lambda(C_i)$ .

DOWÓD LEMATU 4.6

Dowód Lematu 4.6 przedstawimy w trzech etapach.

Etap 1:

Przez dany czworościan  $C$  prowadzimy płaszczyzny równoległe do podstawy, w taki sposób, aby wszystkie wierzchołki czworościanów  $C_1, C_2, \dots, C_n$  zawierały się w tych płaszczyznach. Płaszczyzny podzieliły czworościan  $C$  na przyzmatoidy  $P_1, P_2, \dots, P_m$  (rysunek 28).

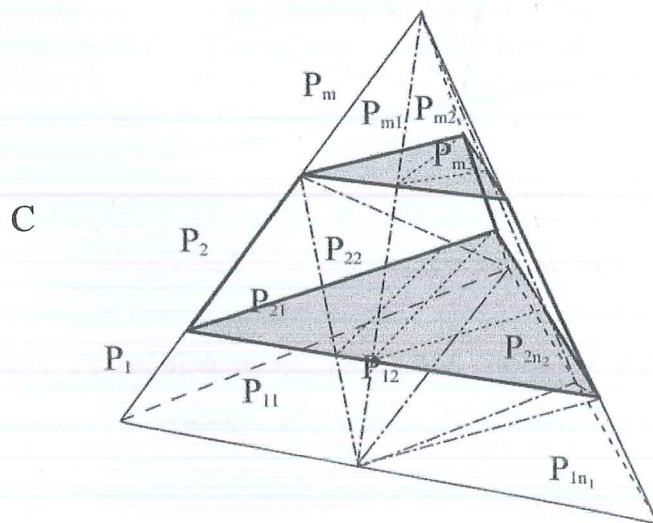
Poprzez przecięcie płaszczyznami czworościanu  $C$  otrzymaliśmy dodatkowy podział na przyzmatoidy  $P_{ij}$ , gdzie indeks  $i$  wskazuje na zawieranie się mniejszych przyzmatoidów  $P_{ij}$  w przyzmatoidzie  $P_i$ , a indeks  $j$  wyznacza kolejność występowania  $P_{ij}$  w przyzmatoidzie  $P_i$ . Zgodnie z tymi oznaczeniami otrzymujemy:

$$P_1 = P_{11} + P_{12} + \dots + P_{1n_1}$$

$$P_2 = P_{21} + P_{22} + \dots + P_{2n_2}$$

...

$$P_m = P_{m1} + P_{m2} + \dots + P_{mn_m}$$



Rys. 28. Podział czworościanu  $C$  na przyzmatoidy  $P_1, P_2, \dots, P_m$ . W tych przyzmatoidach zawierają się przyzmatoidy  $P_{11}, P_{22}, \dots, P_{mn_m}$ . Wyszczególniony przyzmatoid  $P_2 = P_{21} + P_{22} + \dots + P_{2n_2}$ .

Rozpatrując kolejne pryzmatoidy  $P_1, P_2, \dots, P_m$  zauważamy, że zawierające się w nich mniejsze pryzmatoidy, spełniają założenia Lematu 4.4. Dlatego zgodnie z tym lematem suma poszczególnych wartości  $\Lambda(P_{ij})$  równa jest  $\Lambda(P_i)$ . Dla pryzmatoidów

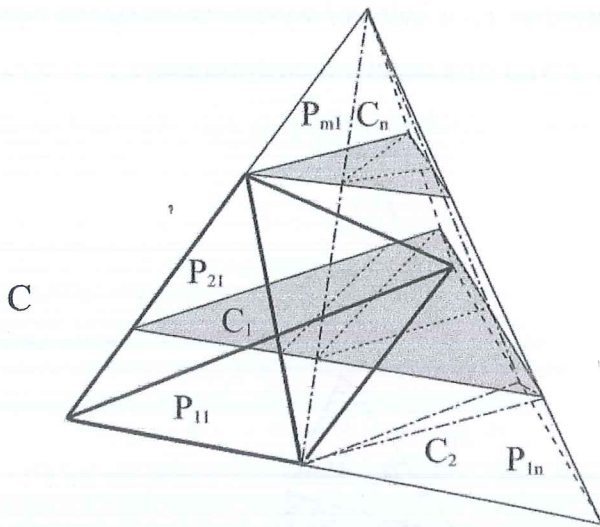
$$P_1, P_2, \dots, P_m \text{ zachodzi równość } \Lambda(P_i) = \sum_{j=1}^{n_i} \Lambda(P_{ij}).$$

Na podstawie Lematu 4.2 wiemy, że suma wartości przypisanych kolejnym pryzmatoidom  $P_i$  wynosi  $\Lambda(C)$ , czyli  $\Lambda(C) = \sum_{i=1}^m \Lambda(P_i)$ .

$$\text{Ponieważ } \Lambda(C) = \sum_{i=1}^m \Lambda(P_i), \Lambda(P_i) = \sum_{j=1}^{n_i} \Lambda(P_{ij}), \text{ stąd } \Lambda(C) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \Lambda(P_{ij}).$$

ETAP 2:

Przyjrzyjmy się temu samemu podziałowi czworościanu  $C$  na czworościany  $C_1, C_2, \dots, C_n$  oraz pryzmatoidy  $P_{ij}$ . W każdym czworościanie  $C_k$  znajdują pryzmatoidy  $P_{ij}$  (rysunek 29).



Rys. 29. Podział czworościanu  $C$  na czworościany  $C_1, C_2, \dots, C_n$ .

Wyszczególniony pryzmatoid  $C_1 = P_{11} + P_{21}$ .

Suma wszystkich wartości  $\Lambda(P_{ij})$  dla pryzmatoidów  $P_{ij}$  zawierających się w poszczególnych czworościanach  $C_k$  równa jest zgodnie z Lematem 4.3 wartości

$$\Lambda(C_k), \text{ czyli } \Lambda(C_k) = \sum_{P_{ij} \subset C_k} \Lambda(P_{ij}).$$

Etap 3:

Korzystając z etapu 1 i 2 otrzymujemy:

$$\sum_{k=1}^n \Lambda(C_k) = \sum_{k=1}^n \sum_{T_{ij} \subset C_k} \Lambda(P_{ij}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \Lambda(P_{ij}) = \Lambda(C), \text{ czyli } \Lambda(C) = \sum_{k=1}^n \Lambda(C_k), \text{ co kończy}$$

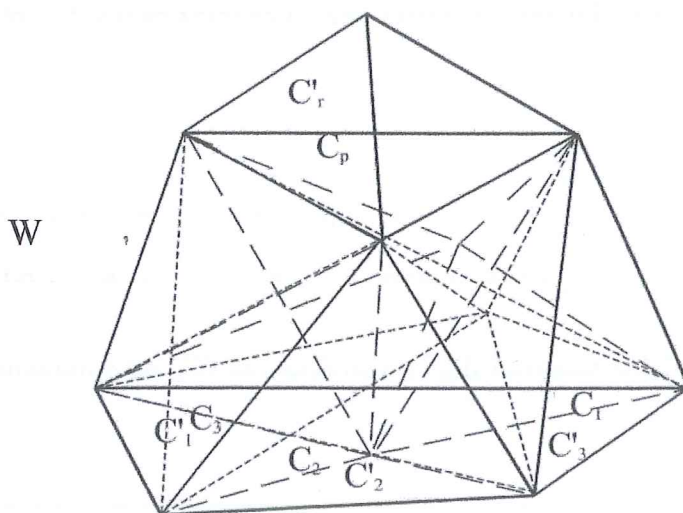
dowód Lematu 4.6.

#### DOWÓD TWIERDZENIA 4

Po udowodnieniu wcześniejszych lematów możemy przejść do realizacji głównego celu, czyli pokazania, że wielkość  $\sum_{i=1}^p \Lambda(C_i)$  nie zależy od podziału

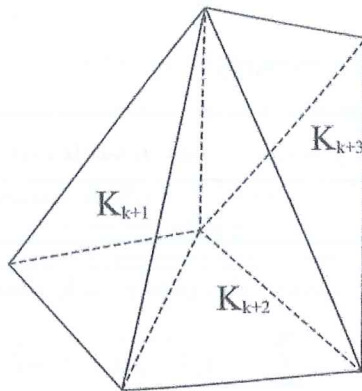
wielościanu  $W$  na czworościany. Pokażemy, że jeśli  $C_1, C_2, \dots, C_p$  oraz  $C'_1, C'_2, \dots, C'_r$

(rys. 30) są dwoma podziałami wielościanu  $W$  na czworościany, to  $\sum_{i=1}^p \Lambda(C_i) = \sum_{i=1}^r \Lambda(C'_i)$ .



Rys. 30. Podział wielościanu  $W$  na czworościany  $C_1, C_2, \dots, C_p$  oraz  $C'_1, C'_2, \dots, C'_r$ .

Podział na  $C_1, C_2, \dots, C_p$  oraz  $C'_1, C'_2, \dots, C'_r$  spowodował powstanie podziału wielościanu  $W$  na mniejsze wielościany. Jeśli powstałe wielościany są czworościanami, to pozostawiamy je bez zmian. Jeśli natomiast nie są czworościanami, to dzielimy wielościany na czworościany (rysunek 31). Finalnie wielościan  $W$  zostaje podzielony na czworościany  $K_1, K_2, \dots, K_n$ .



Rys. 31. Podział jednego z wielościanów, zawierających się w wielościanie  $W$  na czworościany  $K_1, K_2, \dots, K_n$

W każdym czworościanie z pierwszego podziału (podziału na czworościany  $C_1, C_2, \dots, C_p$ ), znajduje się pewna liczba czworościanów  $K_j$ . Każdy czworościan  $C_i$  można przedstawić jako  $C_i = K_{j_1} + \dots + K_{j_l}$ . Korzystając z Lematu 4.5, otrzymujemy

$\Lambda(C_i) = \sum_{K_j \subset C_i} \Lambda(K_j)$ . Sumując kolejne wartości dla czworościanów  $C_i$ , otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^p \Lambda(C_i) = \sum_{j=1}^n \Lambda(K_j).$$

Postępując w ten sam sposób w przypadku drugiego podziału (podziału na czworościany  $C'_1, C'_2, \dots, C'_r$ ), otrzymujemy  $C'_i = K_{j_1} + \dots + K_{j_m}$ , czyli  $\Lambda(C'_i) =$

$\sum_{K_j \subset C'_i} \Lambda(K_j)$ . Sumując kolejne wartości dla czworościanów  $C'_i$ , otrzymujemy  $\sum_{i=1}^r \Lambda(C'_i) =$

$$= \sum_{j=1}^n \Lambda(K_j).$$

Ponieważ  $\sum_{i=1}^p \Lambda(C_i) = \sum_{j=1}^n \Lambda(K_j)$  oraz  $\sum_{i=1}^r \Lambda(C'_i) = \sum_{j=1}^n \Lambda(K_j)$ , to z przechodności

otrzymujemy  $\sum_{i=1}^p \Lambda(C_i) = \sum_{i=1}^r \Lambda(C'_i)$ , czyli wartości te są równe niezależnie od podziału

na czworościany danego wielościanu, co kończy dowód Twierdzenia 4.

Wartość  $\sum_{i=1}^p \Lambda(C_i)$  przypiszemy wielościanowi  $W$  i będziemy nazywać

ją objętością wielościanu. Teraz możemy podać ścisłą definicję.



DEFINICJA:

Objętością wielościanu  $C$  nazywamy wielkość  $\Lambda(C) = \sum_{i=1}^n \Lambda(C_i)$ , gdzie  $C_1, C_2, \dots, C_n$  są dowolnym podziałem wielościanu  $C$  na niezachodzące na siebie czworościany (mające rozłączne wnętrza), a  $\Lambda(C_i) = \frac{S_i \cdot H_i}{3}$  ( $S_i$  jest dowolną ścianą czworościanu  $C_i$ , zaś  $H_i$  jest wysokością opuszczoną na tę ścianę).

## Rozdział 4 AKSJOMATY OBJĘTOŚCI

Zdefiniowana w poprzednim rozdziale funkcja  $\Lambda(W)$  posiada następujące własności, zwane aksjomatami objętości.

### 1. AKSJOMAT MONOTONICZNOŚCI:

Jeśli wielościan  $W_1$  zawiera się w wielościanie  $W_2$ , to  $\Lambda(W_1) \leq \Lambda(W_2)$ .

Dowód:

Rozpatrzmy dwa przypadki.

a) Jeśli  $W_1 = W_2$ , to  $\Lambda(W_1) = \Lambda(W_2)$ , czyli teza jest spełniona.

b) Jeśli  $W_1 \subseteq W_2$  i  $W_1 \neq W_2$ , to istnieją niezachodzące na siebie i na  $W_1$  czworościany

$C'_1, C'_2, \dots, C'_n$ , takie, że wielościan  $W_2$  można przedstawić jako  $W_2 = W_1 + C'_1 + C'_2 + \dots + C'_n$ . Jeśli  $W_1 = C_1 + C_2 + \dots + C_m$ , to  $W_2 = C_1 + C_2 + \dots + C_m + C'_1 + C'_2$

$+ \dots + C'_n$ , a wtedy  $\Lambda(W_2) = \sum_{i=1}^m \Lambda(C_i) + \sum_{i=1}^n \Lambda(C'_i) = \Lambda(W_1) + \sum_{i=1}^n \Lambda(C'_i)$ . Ponieważ

$$\Lambda(C'_i) = \frac{S'_i \cdot H'_i}{3} \geq 0, \text{ to } \Lambda(W_1) \leq \Lambda(W_2).$$

### 2. AKSJOMAT ADDYTYWNOŚCI (SUMY):

Jeśli wielościany  $W_1$  i  $W_2$  nie zachodzą na siebie, to istnieje zależność

$$\Lambda(W_1 \cup W_2) = \Lambda(W_1) + \Lambda(W_2).$$

Dowód:

Wielościan  $W_1$  można przedstawić jako  $W_1 = C_1 + C_2 + \dots + C_p$ , natomiast wielościan  $W_2$  jako  $W_2 = C'_1 + C'_2 + \dots + C'_r$ , dlatego  $W_1 \cup W_2 = C_1 + C_2 + \dots +$

$C_p + C'_1 + C'_2 + \dots + C'_r$ . Stąd  $\Lambda(W_1 \cup W_2) = \Lambda\left(\sum_{i=1}^p C_i + \sum_{i=1}^r C'_i\right) = \sum_{i=1}^p \Lambda(C_i) +$

$$\sum_{i=1}^r \Lambda(C'_i) = \Lambda(W_1) + \Lambda(W_2).$$

### 3. AKSJOMAT PRYZYSTAWANIA:

Jeśli wielościany  $W_1$  i  $W_2$  są przystające, to  $\Lambda(W_1) = \Lambda(W_2)$ .

DOWÓD:

Niech  $W_1 = C_1 + C_2 + \dots + C_p$ , czyli  $\Lambda(W_1) = \Lambda(C_1) + \Lambda(C_2) + \dots + \Lambda(C_p)$ . Skoro  $W_1 \equiv W_2$  to  $W_2$  można podzielić na czworościany  $C'_1, C'_2, \dots, C'_r$ , takie że  $C_1 \equiv C'_1, C_2 \equiv C'_2, \dots, C_p \equiv C'_r$ . Ponieważ w przystających czworościanach odpowiednie pola podstawy i wysokości są równe to  $\Lambda(C_i) = \frac{a_i \cdot h_i}{2} = \Lambda(C'_i)$  czyli  $\Lambda(C_i) = \Lambda(C'_i)$ . Stąd  $\Lambda(W_1) = \Lambda(C_1) + \Lambda(C_2) + \dots + \Lambda(C_p) = \Lambda(C'_1) + \Lambda(C'_2) + \dots + \Lambda(C'_r) = \Lambda(W_2)$ .

### 4. AKSJOMAT JEDNOSTKI:

Dla pewnego ustalonego sześciangu  $W_0$  o krawędzi o długości 1, zachodzi równość  $\Lambda(W_0)=1$ .

DOWÓD:

Dany jest sześciąg  $W_0$  o długości krawędzi 1. Dokonując podziału sześciangu sześcioma płaszczyznami przechodzącymi przez przeciwległe krawędzie, otrzymujemy 24 czworościanów  $C$ . Powstałe czworościany mają wspólny wierzchołek (przecięcie wszystkich płaszczyzn). Wysokość powstałych czworościanów wynosi  $\frac{1}{2}$ , a pole

podstawy  $\frac{1}{4}$  (podstawą jest  $\frac{1}{4}$  ściany sześciokąta).

$$\Lambda(W_0) = \Lambda(24 C) = 24 \Lambda(C) = 24 \frac{S \cdot H}{3} = 24 \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}}{3} = 1, \text{ co należało pokazać.}$$