Próbny pisemny egzamin dyplomowy

na Uniwersytecie Wrocławskim

na kierunku matematyka

część II

specjalność teoretyczna

Kwiecień 2002

1. H i N są podgrupami w G, przy czym N jest normalna.
(a) Uzasadnij, że $HN = \{hn : h \in H, n \in N\}$ jest podgrupą w G.
(b) Uzasadnij, że $H \cap N$ jest podgrupą normalną w H.
(c) Uzasadnij, że grupy ilorazowe $HN//N$ i $H//H \cap N$ są izomorficzne.

2. Rozstrzygnij, który z prostopadłościanów wpisanych w daną kulę ma największą objętość.

3. Rozważmy następujące normy na przestrzeni wektorowej R^2:
(a) $||(x,y)||_1 = \sqrt{x^2+y^2}$,
(b) $||(x,y)||_2 = |x| + |y|$,
(c) $||(x,y)||_3 = \max(|x|, |y|)$.
Rozstrzygnij czy przestrzenie $(R^2, ||\cdot||_i)$, $i = 1,2,3$, są:
(i) homeomorficzne jako przestrzenie topologiczne;
(ii) izometryczne jako przestrzenie metryczne;
(iii) izomorficzne jako przestrzenie unormowane.

4. Niech $f : [a,b] \to R$ będzie funkcją klasy C^1 i niech $Z = \{x \in R : f'(x) = 0\}$. Uzasadnij, że obraz $f(Z)$ zbioru Z ma miarę Lebesgue'a zero. Wskazówka: skorzystaj z jednostajnej ciągłości pochodnej f'.