Próbny pisemny egzamin dyplomowy

na Uniwersytecie Wrocławskim

na kierunku matematyka

część II

specjalność zastosowania

Kwiecień 2002

1 Niech $\{N_t, t \geq 0\}$ będzie procesem Poissona z parametrem λ. Określamy proces $\{X_t, t \geq 0\}$ w nastepujący sposób:

$$X_t = \begin{cases} 1 & \text{gdy } N_t \text{ jest liczbą parzystą lub zerem,} \\ -1 & \text{gdy } N_t \text{ jest liczbą nieparzystą.} \end{cases}$$

a) Wykazać, że jest procesem Markowa.

b) Znaleźć rozkłady $P_i(t) = P(X_t = i), i = -1, 1$.

c) Wyznaczyć prawdopodobieństwa przejścia
$p_{ij}(s,t) = P\{X_t = j | x_s = i\}$, gdzie $s < t$, $i, j = -1, 1$.

d) Oblicz wartość średnią i funkcję korelacji tego procesu.

2 Stosując centralne twierdzenie graniczne do odpowiednio wybranego ciągu zmiennych losowych udowodnić, że

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=1}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

3 Prawdopodobieństwo wyrzucenia orła w jednym rzucie monetą wynosi $\frac{1}{a}$, $1 < a < \infty$. Rzucamy monetą niezależnie tak długo, aż po raz pierwszy pojawi się orzeł. Opisać przestrzeń prób i rodzinę rozkładów prawdopodobieństwa na niej, dla tego doświadczenia. Wyznaczyć estymatory parametru a: (1) metodą momentów, (2) metodą największej wiarogodności. Który z nich jest estymatorem nieobciążonym z jednostajnie minimalną wariancją? Odpowiedź uzasadnić.

4 Rozwiąż następujące równanie różniczkowe

$$y'' - 4y' + 4y = t \exp(2t).$$