Pisemny egzamin dyplomowy

na Uniwersytecie Wrocławskim

na kierunku matematyka

część II

specjalność zastosowania

20 czerwca 2002

1. Niech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym na $(0,1)$. Udowodnić, że ciąg zmiennych losowych $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$, którego wyrazy mają postać

$$Y_n = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{X_1^2 + X_2^2 + ... + X_n^2}$$

jest zbieżny prawie wszędzie oraz podać postać granicy.

2. Niech $\{N_1(t), t \geqslant 0\}$ i $\{N_2(t), t \geqslant 0\}$ będą niezależnymi procesami Poissona o intensywnościach odpowiednio λ_1 i λ_2.

(a) Uzasadnić, że proces $\{N(t), t \geqslant 0\} = \{N_1(t) + N_2(t), t \geqslant 0\}$ jest procesem Poissona o intensywności $\lambda_1 + \lambda_2$.

(b) Niech Z oznacza moment zajścia pierwszego zdarzenia w procesie $\{N(t), t \geqslant 0\}$. Podać postać rozkładu zmiennej losowej Z.

3. Niech $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)'$ dla $n \geqslant 2$ będzie próbą z rozkładu wykładniczego o dystrybuancie $F(x;\lambda) = [1 - \exp(-\lambda x)]\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$, $\lambda > 0$. Wyznaczyć estymatory parametru λ:

(a) największej wiarogodności,

(b) nieobciążony z jednostajnie minimalną wariancją.

Który z tych estymatorów ma mniejsze ryzyko przy założeniu kwadratowej funkcji straty?

4. Rozwiązać równanie

$$y'' - 2y' + y = 0,$$

przy warunku początkowym $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.