EGZAMIN DYPLOMOWY, część II (BI), 20.06.2003

Specjalność: **Biomatematyka**

Zadanie **1.** (10 punktów)

Rozwiązać równanie różniczkowe

$$\begin{cases} x'' - 3x' + 2x = 2t + 1 \\ x(0) = 2 \\ x'(0) = 4 \end{cases}$$

Zadanie **2.** (10 punktów)

Kontroler sprawdzał jakość wyprodukowanych żarówek. Pierwsza zła żarówka pojawiła się za 10-tym razem. Oszacować metodą największej wiarygodności prawdopodobieństwo wyprodukowania wadliwej żarówki.

Zadanie **3.** (10 punktów)

Mamy dwie urny: pierwszą pustą, a w drugiej dwie nierozróżnialne kule. Wybieramy losowo urnę i jeśli jest w niej jakaś kula, przenosimy jedną kulę z tej urny do drugiej urny.

(a) Obliczyć rozkład ilości kul w pierwszej urnie po trzecim losowaniu.

(b) Niech p_n oznacza prawdopodobieństwo, że po n-tym losowaniu pierwsza urna jest pusta. Wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{3}.$$

Zadanie **4.** (10 punktów)

Załóżmy, że w diploidalnej populacji częstości genotypów **AA**, **Aa** i **aa** są jednakowe dla obu płci i wynoszą odpowiednio P, Q i R, gdzie $P+Q+R=1$. Wykazać, że częstości genotypów spełniają prawo Hardy'ego-Wainberga wtedy i tylko wtedy, gdy $Q^2 = 4PR$.

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II (EK), 20.06.2003

Specjalność: **Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach**

Zadanie **1.** (10 punktów)

Rozwiązać równanie różniczkowe

$$\begin{cases} x'' - 3x' + 2x = 2t + 1 \\ x(0) = 2 \\ x'(0) = 4 \end{cases}$$

Zadanie **2.** (10 punktów)

Kontroler sprawdzał jakość wyprodukowanych żarówek. Pierwsza zła żarówka pojawiła się za 10-tym razem. Oszacować metodą największej wiarygodności prawdopodobieństwo wyprodukowania wadliwej żarówki.

Zadanie **3.** (10 punktów)

Zakładając dla (0)-latka prawo de Moivre'a przeżycia z $\omega = 100$ obliczyć jednorazową składkę netto dla ubezpieczenia na całe życie dla (40)-latka i $i = 0.04$. Obliczyć jednorazową składkę netto dla renty płatnej ze stałą intensywnością 1 do momentu śmierci dla (40)-latka.

Zadanie **4.** (10 punktów)

Niech $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$, gdzie $N \sim Poi(\lambda)$, a $X_i \sim Bin(1,p)$. Znaleźć rozkład zmiennej losowej S, jej wartość średnią, wariancję i trzeci moment centralny, tzn. $E[(S - E[S])^3]$.

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II (MI), 20.06.2003

Specjalność: **Matematyka z informatyką**

Zadanie **1.** (10 punktów)

Rozwiązać równanie różniczkowe

$$\begin{cases} x'' - 3x' + 2x = 2t + 1 \\ x(0) = 2 \\ x'(0) = 4 \end{cases}$$

Zadanie **2.** (10 punktów)

Kontroler sprawdzał jakość wyprodukowanych żarówek. Pierwsza zła żarówka pojawiła się za 10-tym razem. Oszacować metodą największej wiarygodności prawdopodobieństwo wyprodukowania wadliwej żarówki.

Zadanie **3.** (10 punktów)

Niech będzie dany następujący algorytm

```
for(i=0;i<n;i++)
{
   for(j=0;j<i;j++)
     b[i] = b[i]-A[i][j]*b[j];
   b[i] = b[i]/A[i][i];
}
```

rozwiązywania *„dolnie trójkątnych”* układów równań liniowych. Jaką liczbę mnożeń i dzieleń należy wykonać, aby otrzymać wynik?

Zadanie **4.** (10 punktów)

Korzystając z definicji całki *Riemann'a* obliczyć granicę ciągu

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+n}.$$

Odpowiedź uzasadnić.

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II (NA), 20.06.2003

Specjalność: **Nauczycielska**

Zadanie **1.** (10 punktów)

Rozwiązać równanie różniczkowe

$$\begin{cases} x'' - 3x' + 2x = 2t + 1 \\ x(0) = 2 \\ x'(0) = 4 \end{cases}$$

Zadanie **2.** (10 punktów)

Kontroler sprawdzał jakość wyprodukowanych żarówek. Pierwsza zła żarówka pojawiła się za 10-tym razem. Oszacować metodą największej wiarygodności prawdopodobieństwo wyprodukowania wadliwej żarówki.

Zadanie **3.** (10 punktów)

Rozwiązać w liczbach całkowitych równanie

a) $36x + 63y = 117$,

b) $65x + 39y = 16$.

Zadanie **4.** (10 punktów)

Dla liczby s niech P_s oznacza przekształcenie płaszczyzny zadane wzorem $P_s(x,y) = (x, s\cdot y)$ (powinowactwo prostokątne). Pewien okrąg jest przekształcany przez P_s na elipsę

$$\frac{x^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1.$$

Znaleźć liczbę s i równanie tego okręgu.

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II (TE), 20.06.2003

Specjalność: **Teoretyczna**

Zadanie **1.** (10 punktów)

Dana jest miara μ na σ-ciele $\mathcal{M}$, oraz funkcja na $\mathcal{M}\times\mathcal{M}$ określona wzorem

$$d(A,B) := \mu(A*B),$$

gdzie $A*B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$. Uzasadnić, że jeśli $d(A_n,A)\to 0$ przy $n\to\infty$, to istnieje podciąg n_k taki, że zbiory A oraz $\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=k}^{\infty} A_{n_i}$ pokrywają się z dokładnością do miary zero.

Czy można tutaj uniknąć przechodzenia do podciągu?

Wskazówka: Rozważyć taki podciąg n_k, że $\sum_{k=1}^{\infty} d(A_{n_k},A) < \infty$.

Zadanie **2.** (10 punktów)

Posługując się metodami przestrzeni Hilberta (rzut prostokątny) znaleźć

$$\min_{a,b\in\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} |x^2+ax+b|^2 dx.$$

Jeśli nie potrafisz zastosować metod przestrzeni Hilberta, rozwiąż zadanie jakąkolwiek metodą.

Zadanie **3.** (10 punktów)

Liczbą algebraiczną nazywamy każdą liczbę zespoloną, która jest pierwiastkiem wielomianu o całkowitych współczynnikach. Uzasadnić, że liczb algebraicznych jest przeliczalnie wiele.

Zadanie **4.** (10 punktów)

Znaleźć wszystkie różniczkowalne homomorfizmy z grupy addytywnej liczb rzeczywistych $(\mathbb{R},+)$ w grupę C^* niezerowych liczb zespolonych z działaniem mnożenia. Wskazówka: ułóż i rozwiąż odpowiednie równanie różniczkowe.

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II (ZA), 20.06.2003

Specjalność: **Zastosowania rachunku prawdopodobieństwa i statystyki**

Zadanie **1.** (10 punktów)

Rozwiązać równanie różniczkowe

$$\begin{cases} x'' - 3x' + 2x = 2t + 1 \\ x(0) = 2 \\ x'(0) = 4 \end{cases}$$

Zadanie **2.** (10 punktów)

Niech X będzie zmienną losową spełniającą następujące warunki:

(a) $EX^2 < \infty$;

(b) Jeżeli Y i Z są niezależnymi kopiami X, to X ma taki sam rozkład jak zmienna losowa $\dfrac{Y+Z}{\sqrt{2}}$.

Korzystając z centralnego twierdzenia granicznego wykazać, że zmienna losowa X ma rozkład normalny.

Zadanie **3.** (10 punktów)

Niech $\{N(t), t \geqslant 0\}$ będzie standardowym procesem Poissona. Podać postać funkcji wartości średniej $M(t) = E(X(t))$ oraz funkcji kowariancji $R(t,s) = Cov(X(t), X(s))$ procesu $X = \{X(t), t \geqslant 0\}$, gdzie $X(t) = tN(t)$.

Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że realizacja procesu X do chwili t jest funkcją ciągłą.

Zbadać, czy proces X jest

(a) procesem o przyrostach niezależnych,

(b) procesem Markowa.

Zadanie **4.** (10 punktów)

W urnie znajduje się 10 kul, w tym θ kul jest niebieskich, a pozostałe są białe i czerwone. Testujemy hipotezę $H: \theta = 3$ przy alternatywie $K: \theta = 4$ na podstawie koloru trzech wylosowanych kul i odrzucamy H, gdy wszystkie 3 wylosowane kule są niebieskie. Obliczyć prawdopodobieństwa błędów pierwszego i drugiego rodzaju zakładając, że

(a) losowanie odbyło się bez zwracania,

(b) losowanie było ze zwracaniem.