Wersja testu **A** 18 czerwca 2003r.

1. Czy prawdą jest, że

a) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\exists_{y\in\mathbb{R}}\forall_{z\in\mathbb{R}}\ y^2<x^2+z^2$;

b) $\exists_{x\in\mathbb{R}}\forall_{y\in\mathbb{R}}\exists_{z\in\mathbb{R}}\ y^2<x^2+z^2$;

c) $\forall_{y\in\mathbb{R}}\exists_{x\in\mathbb{R}}\forall_{z\in\mathbb{R}}\ y^2<x^2+z^2$;

d) $\exists_{y\in\mathbb{R}}\forall_{x\in\mathbb{R}}\exists_{z\in\mathbb{R}}\ y^2<x^2+z^2$?

2. O twierdzeniu $T(n)$ udowodniono, że prawdziwe jest $T(1)$, oraz że dla dowolnego $n\geqslant 1$ zachodzi implikacja $T(n)\Rightarrow T(n+2)$. Czy można stąd wnioskować, że

a) prawdziwe jest $T(10)$;

b) prawdziwa jest implikacja $T(100)\Rightarrow T(200)$;

c) prawdziwa jest implikacja $T(100)\Rightarrow T(25)$;

d) prawdziwe jest $T(9)$?

3. Czy jest prawdą, że

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=1$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{x}=0$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$?

4. Niech (a_n) będzie ciągiem zbieżnym. Czy stąd wynika, że

a) ciąg (b_n), gdzie $b_n=a_{7n}$, jest zbieżny ;

b) ciąg (a_n) jest ograniczony ;

c) istnieje taka liczba całkowita dodatnia n, że $|a_{n+1}-a_n|<\frac{1}{10}$;

d) ciąg (a_n) jest monotoniczny ?

5. Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ jest zbieżny, jeśli

a) $a_n=\frac{\sqrt{n+7}}{n}$;

b) $a_n=\frac{(-1)^n n}{\sqrt{n+7}}$;

c) $a_n=\frac{1}{n^2+\sqrt{n+7}}$;

d) $a_n=\frac{1}{n\sqrt{n+7}}$?

6. Czy funkcja f jest monotoniczna w swojej dziedzinie, jeżeli dana jest wzorem

a) $f(x) = \log_2 |x|$;

b) $f(x) = \log_{1/2} x$;

c) $f(x) = \log_x (1/2)$;

d) $f(x) = \log_x 2$?

7. Czy funkcja f ma lokalne minimum w punkcie (0,0), jeżeli dana jest wzorem

a) $f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$;

b) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$;

c) $f(x,y) = e^{x^2} + e^{y^2}$;

d) $f(x,y) = x^4 + y^4$?

8. Czy jest prawdą, że

a) $\forall_{x>0} \operatorname{arctg}(1/x) = \pi/2 - \operatorname{arctg} x$;

b) $\operatorname{arctg}(\pi/4) = 1$;

c) $\operatorname{arctg} 1 = \pi/4$;

d) $\forall_{x\in\mathbb{R}} \operatorname{arctg}(-x) = \operatorname{arctg} x$?

9. Czy funkcja f określona podanym wzorem jest ograniczona w swojej dziedzinie

a) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x-5}$;

b) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$;

c) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}$;

d) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$?

10. Czy dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi równość

a) $(-1)^{n^6} = (-1)^n$;

b) $(-1)^{n^5+n^4} = 1$;

c) $(-1)^{n^3} = ((-1)^n)^3$;

d) $(-1)^{n^2} = 1$?

11. Czy rząd podanej macierzy jest równy 3

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 61 & -31 \\ 27 & 72 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$?

12. Czy poprawnie obliczono wyznacznik

a) $\det \begin{pmatrix} 1 & 8 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} = 30$;

b) $\det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & 5 & 0 \\ 9 & 8 & 9 & 2 \end{pmatrix} = 60$;

c) $\det \begin{pmatrix} 331 & 343 \\ 343 & -255 \end{pmatrix} = 137$;

d) $\det \begin{pmatrix} 31 & 51 & 17 \\ 0 & 0 & 53 \\ 0 & 0 & 75 \end{pmatrix} = 1$?

13. Macierz A o wymiarach 4×4 ma wartości własne -1, 0, 2 i 9. Czy stąd wynika, że jedną z wartości własnych macierzy A^2 jest liczba

a) 1;

b) 3;

c) 4;

d) 0?

14. Dany jest układ równań liniowych **jednorodnych** z trzema niewiadomymi. Wiadomo, że trójka $(1,1,0)$ jest rozwiązaniem tego układu, a trójka $(0,1,1)$ nie jest jego rozwiązaniem. Czy stąd wynika, że

a) trójka $(0,1,0)$ nie jest rozwiązaniem danego układu;

b) trójka $(1,2,1)$ nie jest rozwiązaniem danego układu;

c) trójka $(0,3,3)$ nie jest rozwiązaniem danego układu;

d) trójka $(2,2,0)$ jest rozwiązaniem danego układu?

15. Niech $\mathbb{C}$ oznacza zbiór liczb zespolonych. Czy istnieje element rzędu 3 w grupie

a) $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$;

b) $(\mathbb{C},+)$;

c) $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$;

d) izometrii płaszczyzny ze składaniem?

16. Niech I będzie dowolnym ideałem pierścienia liczb całkowitych $(\mathbb{Z},+,\cdot)$. Czy stąd wynika, że dla dowolnych $i,j\in I$ oraz $n\in\mathbb{Z}$

a) $i\cdot j\in I$;

b) $i+n\in I$;

c) $i\cdot n\in I$;

d) $i+j\in I$?

17. Czy podany wielomian jest podzielny przez wielomian $x+1$

a) $x^{100}+x^{77}+x^{37}+1$;

b) $4x^{222}-3x^{200}-2x^{144}-x^{111}$;

c) $7x^{100}-4x^{44}-3x^{33}$;

d) $5x^{55}+2x^{22}-3x^{3}$?

18. Czy jednym z rozwiązań równania $z^{24}=1$ jest

a) $z=-i$;

b) $z=\frac{\sqrt{3}-i}{2}$;

c) $z=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$;

d) $z=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$?

19. Losujemy liczbę ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 12\}$. Niech
A - zdarzenie, że wylosowana liczba przy dzieleniu przez 7 daje resztę 1, 3 lub 5,
B - zdarzenie, że wylosowana liczba jest nie większa niż 4,
C - zdarzenie, że wylosowana liczba jest nieparzysta.
Czy wtedy

a) zdarzenia B i C są niezależne ;

b) zdarzenia A i B są niezależne ;

c) zdarzenia A, B i C są niezależne ;

d) zdarzenia A i C są niezależne ?

20. Wykonujemy 3 rzuty kostką. Czy wtedy

a) prawdopodobieństwo, że wypadły trzy różne liczby, jest równe $5/9$;

b) prawdopodobieństwo, że wypadła dokładnie jedna szóstka, jest równe $25/216$;

c) prawdopodobieństwo, że suma oczek wyrzuconych w dwóch pierwszych rzutach jest równa liczbie oczek wyrzuconych w trzecim rzucie, wynosi $5/72$;

d) prawdopodobieństwo, że wypadły dokładnie dwie szóstki, jest równe $5/72$?