

EGZAMIN DYPLOMOWY, część I (zadania otwarte)
18.06.2003

Zadanie **1.** (3 punkty)

Wyznaczyc najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x) = \frac{1}{x} - |x - 2|$$

na przedziale $[\frac{1}{2}, 3]$. Podać punkty, w których te wartości są osiąmane.

Zadanie **2.** (4 punkty)

Parabola o równaniu $y = x^2$ oraz proste styczne do niej w punktach $(-1, 1)$ i $(3, 9)$ dzielą płaszczyznę na 7 części, z których jedna jest ograniczona.

Obliczyć jej pole.

Zadanie **3.** (3 punkty)

Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n\sqrt{n} + 7n - 3}{10n^3 + 5n^2 - 9}.$$

Odpowiedź uzasadnić.

Zadanie **4.** (3 punkty)

Wyznaczyć rząd macierzy

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

w zależności od parametru a .

Zadanie **5.** (3 punkty)

Dowieść, że jeżeli dla dowolnych elementów grupy a i b zachodzi równość

$$(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1},$$

to grupa jest abelowa.

Zadanie **6.** (4 punkty)

Gracz rzuca kostką do gry. Po obejrzeniu wyniku rzutu, gracz może odebrać wygraną w wysokości 10 zł za każde wyrzucone oczko lub zapłacić 8 zł za unieważnienie pierwszego rzutu i rzucić po raz drugi, odbierając wygraną w wysokości 10 zł za każde oczko wyrzucone w drugim rzucie. Jak powinien postąpić gracz w zależności od liczby wyrzuconych oczek, aby zmaksymalizować wartość oczekiwaną swojej wygranej?

Ile wynosi wartość oczekiwana wygranej gracza w całej grze, jeśli będzie postępował optymalnie?