

**EGZAMIN DYPLOMOWY, część I (zadania otwarte)**  
**16.02.2004**

*Zadanie 1.* Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x, y) = x + y$$

na zbiorze

$$\{(x, y); x^2 + xy + y^2 = 1\}$$

oraz podać, w których punktach te wartości są osiągnane.

*Zadanie 2.* Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste dodatnie  $a$ , dla których szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^a + 1}{n^a + n^2}$$

jest zbieżny.

*Zadanie 3.* Obliczyć całkę

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^{2x} + e^x}.$$

*Zadanie 4.* Podać przykład macierzy kwadratowej  $3 \times 3$  o następujących dwóch własnościach:

1° wektory  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$  oraz  $(1, 0, 1)$  są wektorami własnymi macierzy,

2° wektor  $(1, 1, 1)$  nie jest wektorem własnym macierzy.

Udowodnić poprawność podanego przykładu.

*Zadanie 5.* Rozstrzygnąć, czy istnieją takie liczby zespolone  $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$ , że zbiór

$\{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6\}$  z mnożeniem liczb zespolonych jako działaniem, jest grupą izomorficzną z grupą permutacji  $S_3$ .

*Zadanie 6.* Dziekan powołuje komisję, która ma ustalić, czy korytarze w Instytucie Matematyki są poziome czy pionowe. Po zapoznaniu się z opiniami ekspertów komisja przeprowadza głosowanie, przy czym każdy z członków komisji podejmuje decyzję zgodną ze stanem faktycznym z takim samym prawdopodobieństwem  $p \in (\frac{1}{2}, 1)$ , a decyzje poszczególnych członków komisji są zdarzeniami niezależnymi. Ostateczną decyzję komisja podejmuje większością głosów, a w przypadku parzystej liczby członków i remisu w głosowaniu, o werdykcie komisji decyduje rzut monetą.

Rozstrzygnąć, w zależności od  $p$ , jaka komisja ustali stan faktyczny z większym prawdopodobieństwem: trzyosobowa czy czteroosobowa?