EGZAMIN DYPLOMOWY, część I (zadania otwarte)
16.02.2004

Zadanie **1.** Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x,y) = x + y$$

na zbiorze

$$\{(x,y);\, x^2 + xy + y^2 = 1\}$$

oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Zadanie **2.** Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste dodatnie a, dla których szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^a + 1}{n^a + n^2}$$

jest zbieżny.

Zadanie **3.** Obliczyć całkę

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^{2x} + e^x}\,.$$

Zadanie **4.** Podać przykład macierzy kwadratowej 3×3 o następujących dwóch własnościach:

1° wektory (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) oraz (1,0,1) są wektorami własnymi macierzy,

2° wektor (1,1,1) nie jest wektorem własnym macierzy.

Udowodnić poprawność podanego przykładu.

Zadanie **5.** Rozstrzygnąć, czy istnieją takie liczby zespolone $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$, że zbiór
$\{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6\}$ z mnożeniem liczb zespolonych jako działaniem, jest grupą izomorficzną z grupą permutacji S_3.

Zadanie **6.** Dziekan powołuje komisję, która ma ustalić, czy korytarze w Instytucie Matematyki są poziome czy pionowe. Po zapoznaniu się z opiniami ekspertów komisja przeprowadza głosowanie, przy czym każdy z członków komisji podejmuje decyzję zgodną ze stanem faktycznym z takim samym prawdopodobieństwem $p \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, a decyzje poszczególnych członków komisji są zdarzeniami niezależnymi. Ostateczną decyzję komisja podejmuje większością głosów, a w przypadku parzystej liczby członków i remisu w głosowaniu, o werdykcie komisji decyduje rzut monetą.

Rozstrzygnąć, w zależności od p, jaka komisja ustali stan faktyczny z większym prawdopodobieństwem: trzyosobowa czy czteroosobowa?