Wersja testu **A** 22 czerwca 2004r.

**1.** Czy prawdą jest, że

a) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\exists_{y\in\mathbb{R}}\exists_{z\in\mathbb{R}}\forall_{t\in\mathbb{R}}\ y+t^2>x^2+z^2$ ;

b) $\forall_{y\in\mathbb{R}}\exists_{x\in\mathbb{R}}\exists_{z\in\mathbb{R}}\forall_{t\in\mathbb{R}}\ y+t^2>x^2+z^2$ ;

c) $\exists_{y\in\mathbb{R}}\forall_{x\in\mathbb{R}}\exists_{z\in\mathbb{R}}\forall_{t\in\mathbb{R}}\ y+t^2>x^2+z^2$ ;

d) $\exists_{x\in\mathbb{R}}\forall_{y\in\mathbb{R}}\exists_{z\in\mathbb{R}}\forall_{t\in\mathbb{R}}\ y+t^2>x^2+z^2$ ?

**2.** Niech $(a_n)$ będzie ciągiem określonym wzorem $a_n=(-1)^n$ oraz niech $g=1$. Czy wtedy

a) $\exists_{\varepsilon>0}\forall_{N}\forall_{n>N}\ |a_n-g|<\varepsilon$ ;

b) $\exists_{\varepsilon>0}\forall_{N}\exists_{n>N}\ |a_n-g|<\varepsilon$ ;

c) $\forall_{\varepsilon>0}\forall_{N}\exists_{n>N}\ |a_n-g|<\varepsilon$ ;

d) $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N}\forall_{n>N}\ |a_n-g|<\varepsilon$ ?

**3.** Czy $\cos x=\frac{1}{2}$, jeżeli

a) $x=\dfrac{\pi}{3}$ ;

b) $x=\dfrac{2\pi}{3}$ ;

c) $x=\dfrac{5\pi}{3}$ ;

d) $x=\dfrac{\pi}{6}$ ?

**4.** Czy prawdziwa jest nierówność

a) $\log_5(\sqrt{2}-1)>\log_5(\sqrt{3}-1)$ ;

b) $\log_\pi e>\log_e \pi$ ;

c) $\log_3 4>\log_5 8$ ;

d) $\log_3 2\sqrt{2}>\log_9 7$ ?

**5.** Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ma wszystkie wyrazy dodatnie. Czy możemy wywnioskować, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest **rozbieżny**, jeśli wiemy ponadto, że

a) $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} a_n \geqslant \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ ;

b) $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} a_n \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ ;

c) ciąg $(a_n)$ jest zbieżny i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ ;

d) $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} a_n \leqslant \dfrac{1}{n}$ ?

**6.** Czy funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna na całej prostej, jeżeli

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x \leqslant 1 \\ ax+b & \text{dla} \quad x > 1 \end{cases},$$

gdzie

a) $a=-1,\ b=2$ ;

b) $a=2,\ b=-1$ ;

c) $a=1,\ b=2$ ;

d) $a=2,\ b=1$ ?

**7.** O funkcji różniczkowalnej $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ wiadomo, że

$$f'(x) \begin{cases} >0 & \text{dla} \quad x \in (2,8) \\ =0 & \text{dla} \quad x \in \{2,8\} \\ <0 & \text{dla} \quad x \in (-\infty,2)\cup(8,\infty) \end{cases}.$$

Czy stąd wynika, że

a) $f(-50) > f(50)$ ;

b) $f(1) < f(8)$ ;

c) $f(-100) > f(0)$ ;

d) $f(3) < f(7)$ ?

**8.** Czy dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich $x,y$ zachodzi nierówność

a) $x^2y^2 \leqslant x^3 + y^3$ ;

b) $xy^2 \leqslant x^3 + y^3$ ;

c) $xy \leqslant x^2 + y^2$ ;

d) $x^2y^3 \leqslant x^6 + y^6$ ?

**9.** Czy podana funkcja ma lokalne minimum w punkcie $(0,0)$

a) $f(x,y) = x^2 + 7xy - 13y^2$ ;

b) $f(x,y) = x^2 + 7xy + 12y^2$ ;

c) $f(x,y) = x^2 + 7xy + 13y^2$ ;

d) $f(x,y) = x^2 - 7xy + 13y^2$ ?

**10.** Czy liczba 1 jest elementem zbioru

a) $\{\cos x : x \in (0,6)\}$ ;

b) $\{\mathrm{arctg}\, x : x \in \mathbb{R}\}$ ;

c) $\{\ln x : x \in (0,\infty)\}$ ;

d) $\{e^x : x \in \mathbb{R}\}$ ?

**11.** Czy podany zbiór z działaniem jest grupą

a) $\{0, 2, 4, 6\}$ z mnożeniem modulo 8 ;

b) $\{0, 2, 4, 6\}$ z dodawaniem modulo 8 ;

c) $\{0, 2, 4, 6\}$ z dodawaniem modulo 7 ;

d) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ z mnożeniem modulo 7 ?

**12.** Czy podany zbiór jest podpierścieniem pierścienia wielomianów jednej zmiennej o współczynnikach całkowitych

a) zbiór wielomianów stopnia nie większego niż 6 ;

b) zbiór wielomianów będących funkcjami nieparzystymi ;

c) zbiór wielomianów stopnia nie większego niż 5 ;

d) zbiór wielomianów będących funkcjami parzystymi ?

**13.** Macierz kwadratowa $A$ o wymiarach $2\times 2$ ma wszystkie wyrazy całkowite, a jej wyznacznik jest równy $-17$. Czy na podstawie tych informacji możemy z całą pewnością stwierdzić, że

a) co najmniej jeden wyraz macierzy $A$ jest ujemny ;

b) co najmniej jeden wyraz macierzy $A$ jest nieparzysty ;

c) co najmniej jeden wyraz macierzy $A$ jest parzysty ;

d) co najmniej jeden wyraz macierzy $A$ jest różny od zera ?

**14.** Dany jest układ trzech równań liniowych **jednorodnych** z trzema niewiadomymi $x,y,z$. Wiadomo, że jednym z równań układu jest równanie

$$x+y+z=0$$

oraz że trójka $(x,y,z)=(1,-1,0)$ jest rozwiązaniem danego układu. Czy stąd wynika, że

a) trójka $(x,y,z)=(3,-2,-1)$ nie jest rozwiązaniem układu równań ;

b) trójka $(x,y,z)=(2,-1,-1)$ jest rozwiązaniem układu równań ;

c) trójka $(x,y,z)=(3,-3,0)$ jest rozwiązaniem układu równań ;

d) trójka $(x,y,z)=(3,-2,1)$ nie jest rozwiązaniem układu równań ?

**15.** Czy jedną z wartości własnych macierzy $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ jest liczba

a) $-1$ ;

b) $1$ ;

c) $3$ ;

d) $-2$ ?

**16.** Czy zbiór rozwiązań zespolonych $z$ podanego równania jest okręgiem

a) $z+\overline{z}=z\overline{z}+3$;

b) $z+\overline{z}=3$;

c) $z\overline{z}=z+\overline{z}+3$;

d) $z\overline{z}=3$?

**17.** Czy w grupie cyklicznej $\mathbb{Z}_n$ (zbiór $\{0,1,2,\ldots,n-1\}$ z dodawaniem modulo $n$) liczba 6 jest elementem rzędu $n$, jeżeli

a) $n=30$;

b) $n=45$;

c) $n=40$;

d) $n=35$?

**18.** Losujemy liczbę $k$ ze zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$, a następnie liczbę $\ell$ ze zbioru $\{1,2,\ldots,k\}$. Niech $E_n$ będzie wartością oczekiwaną liczby $\ell$. Czy wtedy

a) $E_2=3/2$;

b) $E_5=2$;

c) $E_4=7/4$;

d) $E_3=2$?

**19.** Wykonano $n$ rzutów kostką do gry. Niech $E_n$ będzie wartością oczekiwaną sumy liczb oczek wyrzuconych we wszystkich rzutach. Czy wtedy

a) $E_2<8$;

b) $E_1<5$;

c) $E_4>14$;

d) $E_3>10$?

**20.** Rzucamy 3 razy fałszywą monetą, w której orzeł wypada z prawdopodobieństwem 2/3, a reszka z prawdopodobieństwem 1/3. Niech $p_k$ będzie prawdopodobieństwem, że wypadło dokładnie $k$ orłów. Czy wtedy

a) $p_3 < 1/3$;

b) $p_0 < 1/9$;

c) $p_2 < 4/9$;

d) $p_1 < 2/9$?