EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 21.09.2004
Biomatematyka

Zadanie **1. (8 punktów)**
Zakładamy, że nukleotydy na poszczególnych pozycjach w genomie bakterii *E. coli* o długości 4.7x10^6 par zasad występują w sposób niezależny z tą samą częstością. Jakiej ilości fragmentów restrykcyjnych możemy oczekiwać po przeprowadzeniu kompletnego trawienia enzymem restrykcyjnym *Hae* III, który rozpoznaje fragment GGCC ?

Zadanie **2. (8 punktów)**
Przyjmijmy, ze mutacje nukleotydów w DNA następują zgodnie z modelem Kimury z parametrem transwersji α i tranzycji β, a więc substytucje nukleotydów opisane są przez łańcuch Markowa o macierzy przejść w jednym kroku postaci

$$\begin{bmatrix} 1-\alpha-2\beta & \beta & \beta & \alpha \\ \beta & 1-\alpha-2\beta & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & 1-\alpha-2\beta & \beta \\ \alpha & \beta & \beta & 1-\alpha-2\beta \end{bmatrix}$$

Jaką frakcję poszczególnych nukleotydów będziemy obserwować, w tak ewoluującym DNA , po upływie długiego czasu?

Zadanie **3. (8 punktów)**
W urnie znajduje się N kul ponumerowanych liczbami od 1 do N. Losujemy bez zwracania próbkę o liczebności n. Oznaczmy przez η największy spośród numerów kul w tej próbce. Znajdź rozkład zmiennej losowej η.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Przyjmujemy, że wytrzymałość betonu ma rozkład normalny ze średnią wytrzymałością na ściskanie równą 203x$10^5\,N/m^2$. W celu oszacowania wytrzymałości na ściskanie pewnej partii betonu, która wedle zapewnień producenta ma większa wytrzymałość na ściskanie niż przeciętna, dokonano $n=80$ niezależnych pomiarów wytrzymałości tego betonu otrzymując następujące wyniki (w $10^5\,N/m^2$):

Wytrzymałość	190-194	194-198	198-202	202-206	206-210	210-214
Liczba pomiarów	6	12	26	20	11	5

(a) Skonstruuj przedział ufności na poziomie ufności 0,99 dla średniej.

(b) Przeprowadź test dotyczący średniej wytrzymałości na ściskanie tej partii betonu na poziomie istotności $\alpha=0{,}05$.

(c) Jak jest twoja konkluzja po przeprowadzeniu testu?

Zadanie **5. (8 punktów)**

Znajdź rozwiązanie $y=y(t)$ zagadnienia

$$y''+y'-2y=18te^t$$
$$y(0)=0$$
$$y'(0)=1\,.$$

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 21.09.2004
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

Zadanie **1. (8 punktów)**

Właściciel obszaru o powierzchni 4 ha (40 000 m^2) postanowił założyć na nim sad jabłoni, przeznaczając na ten cel 30 000 zł. Ma do wyboru 3 gatunki sadzonek jabłoni w cenie:
gatunek A – 10 zł/szt., gatunek B – 20 zł/szt., gatunek C – 15 zł/szt.
Gatunki te mają różne wymagania pielęgnacyjne; między innymi
1 drzewo gatunku A zajmuje 16 m^2 powierzchni, gatunku B – 10 m^2, a gatunku C – 20 m^2.
Wiadomo też, że ze względu na wydajność oraz ceny owoców zysk z tytułu eksploatacji drzewa
gatunku A wynosi 2 000 zł, gatunku B – 2 500 zł, a gatunku C – 3 000 zł rocznie.

Ułóż odpowiednie zadanie programowania liniowego i znajdź jego rozwiązanie optymalne.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Zakładamy hipotezę jednorodnej populacji oraz $s(x) = P(T > x) = \frac{\sqrt{100-x}}{10}$, dla $0 \leqslant x \leqslant 100$.
1) Wyznaczyć prawdopodobieństwo ${}_{36}p_{24}$ tego, że 24-latek przeżyje co najmniej 36 lat.
2) Przy założeniu hipotezy jednostajności (HU) obliczyć prawdopodobieństwo ${}_{0.5}q_{30}$ tego, że 30-latek umrze przed upływem 1/2 roku.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Szkoda X ma rozkład równomierny na zbiorze $\{0,1,2,3,...,10\}$. Dla kontraktu stop-loss $I_d(X)$ obliczyć:
1) $E(I_2(X))$.
2) $Var(I_1(X))$.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Przyjmujemy, że wytrzymałość betonu ma rozkład normalny ze średnią wytrzymałością na ściskanie równą 203x$10^5 N/m^2$. W celu oszacowania wytrzymałości na ściskanie pewnej partii betonu, która wedle zapewnień producenta ma większa wytrzymałość na ściskanie niż przeciętna, dokonano $n=80$ niezależnych pomiarów wytrzymałości tego betonu otrzymując następujące wyniki (w $10^5 N/m^2$):

Wytrzymałość	190-194	194-198	198-202	202-206	206-210	210-214
Liczba pomiarów	6	12	26	20	11	5

(a) Skonstruuj przedział ufności na poziomie ufności 0,99 dla średniej.

(b) Przeprowadź test dotyczący średniej wytrzymałości na ściskanie tej partii betonu na poziomie istotności $\alpha=0{,}05$.

(c) Jak jest twoja konkluzja po przeprowadzeniu testu?

Zadanie **5. (8 punktów)**

Znajdź rozwiązanie $y=y(t)$ zagadnienia

$$y''+y'-2y=18te^t$$
$$y(0)=0$$
$$y'(0)=1\,.$$

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 21.09.2004
Matematyka z informatyką

Zadanie **1.** **(8 punktów)**
W pliku `a.cpp` jest źródło programu:

```
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>

int main()
{
   int m,n,M,N;

   M = m = 21;
   N = n = 6;
   for(int k=n%m ; k ; n=m,m=k,k=n%m)
     ;
   printf("\nWynik: %i\n",N*M/m);
   return 0;
}
```

Wykonujemy następujące komendy (`gcc version 2.95.4`):

```
gcc -Wall a.cpp -o a
./a
```

Opisać, co pojawi się na ekranie komputera.

Zadanie **2.** **(8 punktów)**
Dla liczby $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ i jej komputerowej reprezentacji $\bar{x}$ wielkość

$$\varepsilon_x = \frac{\bar{x} - x}{x}$$

nazywamy *błędem względnym* wartości $\bar{x}$. Wykazać równość:

$$\varepsilon_{x+y} = \frac{x}{x+y}\varepsilon_x + \frac{y}{x+y}\varepsilon_y,$$

gdzie $x \neq 0$, $y \neq 0$ i $x+y \neq 0$.

Zadanie **3.** **(8 punktów)**
Niech funkcja $f \in C^3[-1,1]$ ma ciągłą trzecią pochodną.
Jak należy wybrać $x_0, x_1, x_2 \in [-1,1]$, aby dla wielomianu interpolacyjnego $p = p(x)$ stopnia co najwyżej dwa, spełniającego $f(x_i) = p(x_i)$, $i = 0,1,2$ oraz dla dowolnej liczby $x \in [-1,1]$ zachodziła nierówność

$$|f(x) - p(x)| \leqslant \frac{1}{2^2\,3!} \max_{-1 \leqslant t \leqslant 1} |f'''(t)| \ ?$$

Zadanie **4. (8 punktów)**

Przyjmujemy, że wytrzymałość betonu ma rozkład normalny ze średnią wytrzymałością na ściskanie równą 203x$10^5\, N/m^2$. W celu oszacowania wytrzymałości na ściskanie pewnej partii betonu, która wedle zapewnień producenta ma większa wytrzymałość na ściskanie niż przeciętna, dokonano $n=80$ niezależnych pomiarów wytrzymałości tego betonu otrzymując następujące wyniki (w $10^5\, N/m^2$):

Wytrzymałość	190-194	194-198	198-202	202-206	206-210	210-214
Liczba pomiarów	6	12	26	20	11	5

(a) Skonstruuj przedział ufności na poziomie ufności 0,99 dla średniej.

(b) Przeprowadź test dotyczący średniej wytrzymałości na ściskanie tej partii betonu na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$.

(c) Jak jest twoja konkluzja po przeprowadzeniu testu?

Zadanie **5. (8 punktów)**

Znajdź rozwiązanie $y = y(t)$ zagadnienia

$$y'' + y' - 2y = 18te^t$$
$$y(0) = 0$$
$$y'(0) = 1\,.$$

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 21.09.2004
Matematyka nauczycielska

Zadanie **1. (8 punktów)**
Wyznaczyć **wszystkie** liczby naturalne p, $p > 1$, dla których prawdziwe jest stwierdzenie:
Liczba jest podzielna przez 3 wtedy i tylko wtedy, gdy suma jej cyfr w systemie pozycyjnym o podstawie p jest podzielna przez 3.

Zadanie **2. (8 punktów)**
Uzasadnić, że wykres funkcji $y = x^2 - 5x + 6$ jest miejscem geometrycznym punktów równo odległych od pewnego punktu (ogniska) F i prostej (kierownicy) l.

Zadanie **3. (8 punktów)**
Niech dany będzie prostopadłościan, którego krawędzie mają długości a, a i $2a$. Niech $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8$ będą rzutami prostopadłymi wierzchołków tego prostopadłościanu na jego przekątną. Jakie są odległości punktów $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8$ od końców rozważanej przekątnej?

Zadanie **4. (8 punktów)**

Przyjmujemy, że wytrzymałość betonu ma rozkład normalny ze średnią wytrzymałością na ściskanie równą 203x$10^5\, N/m^2$. W celu oszacowania wytrzymałości na ściskanie pewnej partii betonu, która wedle zapewnień producenta ma większa wytrzymałość na ściskanie niż przeciętna, dokonano $n = 80$ niezależnych pomiarów wytrzymałości tego betonu otrzymując następujące wyniki (w $10^5\, N/m^2$):

Wytrzymałość	190-194	194-198	198-202	202-206	206-210	210-214
Liczba pomiarów	6	12	26	20	11	5

(a) Skonstruuj przedział ufności na poziomie ufności 0,99 dla średniej.

(b) Przeprowadź test dotyczący średniej wytrzymałości na ściskanie tej partii betonu na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$.

(c) Jak jest twoja konkluzja po przeprowadzeniu testu?

Zadanie **5. (8 punktów)**

Znajdź rozwiązanie $y = y(t)$ zagadnienia

$$y'' + y' - 2y = 18te^t$$
$$y(0) = 0$$
$$y'(0) = 1\,.$$

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 21.09.2004
Matematyka teoretyczna

Zadanie **1. (10 punktów)**
Niech $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ będą dodatnio określonymi symetrycznymi macierzami o wyrazach rzeczywistych. Uzasadnić, że wszystkie wartości własne macierzy AB są rzeczywiste i dodatnie.

Zadanie **2. (10 punktów)**
Rozważamy operator L, który funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ przyporządkowuje funkcję $Lf(x) = x\cdot f(x)$. Niech $L^1 = \{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,;\, \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx < \infty\}$ oraz $L^1_x = \{f \in L^1\,;\, Lf \in L^1\}$.

Uzasadnić, że
A. L^1_x jest właściwą i gęstą podprzestrzenią w L^1
B. operator $L : L^1_x \to L^1$ nie jest ciągły względem normy L^1.

Zadanie **3. (10 punktów)**
Uzasadnić, że rodzina wszystkich przeliczalnych podzbiorów (skończonych i nieskończonych) zbioru mocy continuum ma moc continuum.

Zadanie **4. (10 punktów)**
Uzasadnić, że całka nieoznaczona z rzeczywistej funkcji ciągłej nieparzystej jest funkcją parzystą.

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 21.09.2004
Zastosowania

Zadanie **1. (8 punktów)**

Niech $\{B(t)\,;\,t \geqslant 0\}$ będzie standardowym ruchem Browna i niech $T > 0$ będzie stałą. Znaleźć wszystkie $a > 0$ takie, że proces $\{W_a(t)\,;\,t \geqslant 0\}$ określony jako

$$W_a(t) = \begin{cases} B(t) & \text{dla } t \leqslant T \\ \\ aB(T) - B(t) & \text{dla } t > T \end{cases}$$

jest standardowym ruchem Browna.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Niech $\{X_n\}$, $\{Y_n\}$ będą wzajemnie niezależnymi ciągami niezależnych zmiennych losowych o rozkładach odpowiednio

$$P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = 1/2$$

oraz

$$P(Y_n = 2) = P(Y_n = -2) = 1/2\,.$$

Zbadać zbieżność według rozkładu dla
a)

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i + \sum_{i=1}^n Y_i}{\sqrt{n}},$$

gdy $n \to \infty$.
b)

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n Y_i}{\sqrt{n}\log(n)},$$

gdy $n \to \infty$.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech $(X_1,...,X_n)$ będzie próbą rozmiaru n z rozkładu o gęstości względem miary Lebesgue'a postaci

$$f(x;\theta) = \theta \exp(-\theta x) 1_{(0,\infty)}(x),$$

$\theta > 0$. Znaleźć minimalną statystykę dostateczną dla parametru θ. Odpowiedź uzasadnić cytując odpowiednie twierdzenia.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Niech $\{N(t)\,;\,t\geqslant 0\}$ będzie procesem Poissona z intensywnością $\lambda>0$. Wykazać, że dla dowolnego $t\geqslant 0$ i pewnej funkcji Ψ zachodzi równość

$$E\exp(i\theta N(t))=\exp(t\Psi(\theta))$$

oraz podać postać funkcji Ψ.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Znajdź rozwiązanie $y=y(t)$ zagadnienia

$$y''+y'-2y=18te^t$$
$$y(0)=0$$
$$y'(0)=1\,.$$