

**EGZAMIN DYPLOMOWY, część I (zadania otwarte)**  
**17.09.2004**

**Zadanie 1. (3 punkty)**

Wyznaczyć wszystkie wartości parametru  $A$ , dla których funkcja

$$f_A(x) = \begin{cases} \frac{e^{Ax} - e^{Ax^2} - Ax}{x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć  $f'_A(0)$  dla każdej z wyznaczonych wartości parametru  $A$ .

**Zadanie 2. (3 punkty)**

Obliczyć całkę

$$\int_{-R-\sqrt{R^2-x^2}}^R \int_{\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} (x^2 + y^2) e^{x^4+2x^2y^2+y^4} dy dx .$$

**Zadanie 3. (4 punkty)**

Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$$

jest zbieżny, a jego suma jest mniejsza od 2.

**Zadanie 4. (3 punkty)**

Podać przykład macierzy o wymiarach  $3 \times 3$ , której wielomian charakterystyczny jest równy  $-x^3 + 3x + 2$ , a wektory  $(1,1,0)$ ,  $(0,1,1)$ ,  $(1,0,1)$  są wektorami własnymi.

**Zadanie 5. (3 punkty)**

Wyznaczyć liczbę elementów rzędu 2 w grupie permutacji  $S_4$ .

**Zadanie 6. (4 punkty)**

Gracze  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$  grają w następującą grę. Każdy z graczy wpłaca do puli 60 złotych i obstawia orła lub reszkę. Następnie wykonuje się rzut monetą i pula dzielona jest po równo między graczy, którzy trafnie obstawili wynik rzutu monetą.

Gracz  $A$  zawsze obstawia orła. Gracze  $B$  i  $C$  zawsze obstawiają reszkę. Gracz  $D$  obstawia orła lub reszkę z jednakowym prawdopodobieństwem.

Wyznaczyć wartość oczekiwaną wygranej netto (tzn. po odliczeniu kwoty wpłaconej do puli) każdego z graczy w jednej rozegranej grze.