EGZAMIN DYPLOMOWY, część I (zadania otwarte)
17.09.2004

Zadanie **1.** **(3 punkty)**

Wyznaczyć wszystkie wartości parametru A, dla których funkcja

$$f_A(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{Ax} - e^{Ax^2} - Ax}{x^2} & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'_A(0)$ dla każdej z wyznaczonych wartości parametru A.

Zadanie **2.** **(3 punkty)**

Obliczyć całkę

$$\int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} (x^2+y^2) e^{x^4+2x^2y^2+y^4} \, dy \, dx \, .$$

Zadanie **3.** **(4 punkty)**

Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$$

jest zbieżny, a jego suma jest mniejsza od 2.

Zadanie **4.** **(3 punkty)**

Podać przykład macierzy o wymiarach 3×3, której wielomian charakterystyczny jest równy $-x^3 + 3x + 2$, a wektory (1,1,0), (0,1,1), (1,0,1) są wektorami własnymi.

Zadanie **5.** **(3 punkty)**

Wyznaczyć liczbę elementów rzędu 2 w grupie permutacji S_4.

Zadanie **6.** **(4 punkty)**

Gracze A, B, C i D grają w następującą grę. Każdy z graczy wpłaca do puli 60 złotych i obstawia orła lub reszkę. Następnie wykonuje się rzut monetą i pula dzielona jest po równo między graczy, którzy trafnie obstawili wynik rzutu monetą.

Gracz A zawsze obstawia orła. Gracze B i C zawsze obstawiają reszkę. Gracz D obstawia orła lub reszkę z jednakowym prawdopodobieństwem.

Wyznaczyć wartość oczekiwaną wygranej netto (tzn. po odliczeniu kwoty wpłaconej do puli) każdego z graczy w jednej rozegranej grze.