Zadanie **1.**

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n+2}{n} \leqslant 4^n .$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

Dla $n=1$ mamy $\binom{2n+2}{n} = \binom{4}{1} = 4$ oraz $4^n = 4^1 = 4$, a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $4 \leqslant 4$, jest więc prawdziwa.

Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$\binom{2n+2}{n} \leqslant 4^n .$$

Chcemy wykazać, że

$$\binom{2n+4}{n+1} \leqslant 4^{n+1} .$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$\binom{2n+4}{n+1} = \frac{(2n+4)!}{(n+1)!(n+3)!} = \frac{(2n+2)!(2n+3)(2n+4)}{n!(n+1)(n+2)!(n+3)} =$$

$$= \binom{2n+2}{n} \cdot \frac{(2n+3)(2n+4)}{(n+1)(n+3)} \leqslant 4^n \cdot \frac{(2n+3)(2n+4)}{(n+1)(n+3)} \leqslant 4^n \cdot 4 = 4^{n+1} ,$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{(2n+3)(2n+4)}{(n+1)(n+3)} \leqslant 4$$

dla $n \geqslant 1$. Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom

$$(2n+3)(2n+4) \leqslant 4(n+1)(n+3)$$

$$4n^2+14n+12 \leqslant 4n^2+16n+12$$

$$0 \leqslant 2n ,$$

jest więc prawdziwa.

Na mocy zasady indukcji matematycznej nierówność została udowodniona dla każdego $n \geqslant 1$.

Za dojście do wyrażenia $\binom{2n+2}{n} \cdot \frac{(2n+3)(2n+4)}{(n+1)(n+3)}$ i oszacowanie go przez $4^n \cdot \frac{(2n+3)(2n+4)}{(n+1)(n+3)}$ można było otrzymać **1 punkt**.

Głównym problemem okazało się udowodnienie nierówności

$$\frac{(2n+3)(2n+4)}{(n+1)(n+3)} \leqslant 4 .$$

Ze zbieżności

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)(2n+4)}{(n+1)(n+3)} = 4$$

ta nierówność nie wynika, aczkolwiek dwie osoby w oparciu o powyższą zbieżność zdołały przeprowadzić poprawny dowód, jednak o wiele bardziej skomplikowany niż dowód samej nierówności.