EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 27.06.2005
Biomatematyka

Zadanie **1. (8 punktów)**
Rozpatrzmy populację, dla której funkcja $x(t)$, liczebność w chwili t, zadana jest przez równanie Gompertza

$$x'(t) = rx(t)\log\frac{K}{x(t)},$$

i poddanej odłowom na stałym poziomie H. Znajdź maksymalny dopuszczalny poziom odłowów H nie powodujący wymarcia całej populacji.

Zadanie **2. (8 punktów)**
Funkcja $w : (\mathcal{A} \cup \{-\}) \times (\mathcal{A} \cup \{-\}) \to \mathbf{R}$ jest określona jako

$$\begin{aligned} w(a,a) &= 0, \\ w(a,b) &= 1, \text{dla}\, a \neq b \\ w(a,-) &= w(-,a) = 1. \end{aligned}$$

Odległość edycyjną d_w uzgodnienia $(\mathbf{A}^*, \mathbf{B}^*)$ sekwencji DNA, $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$, definiujemy jako

$$d_w(\mathbf{A}^*, \mathbf{B}^*) = \sum_{i=1}^{n} w(A_i^*, B_i^*),$$

gdzie $n = |\mathbf{A}^*| = |\mathbf{B}^*|$ jest liczbą symboli w ciągach $\mathbf{A}^*$, $\mathbf{B}^*$.

Natomiast odległość edycyjną D_w miedzy sekwencjami DNA $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ jako

$$D_w(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \min\{d_w(\mathbf{A}^*, \mathbf{B}^*) : (\mathbf{A}^*, \mathbf{B}^*) \text{ uzgodnienie sekwencji } (\mathbf{A}, \mathbf{B})\}.$$

(i) Jaka jest odległość edycyjna sekwencji **CCT** oraz **ACGCTT**?

(ii) Znajdź optymalne uzgodnienie dla tych ciągów.

Zadanie **3. (8 punktów)**
Rozważmy rzadką chorobę, na która szansa zapadnięcia wynosi 0,001. Test medyczny daje wynik dodatni, wykrywa chorobę, u osoby chorej z prawdopodobieństwem 0,99. W przypadku osoby zdrowej prawdopodobieństwo uzyskania dodatniego wyniku testu wynosi 0,02. Jakie jest prawdopodobieństwo, że osoba, w przypadku której test dał wynik dodatni jest rzeczywiście chora?

Zadanie **4. (8 punktów)**
Liczba odmian o kolorze różowym, białym i niebieskim dla pewnego gatunku kwiatów jest w stosunku 3:2:5. W 100 losowo wybranych próbkach odpowiednie liczby kwiatów o kolorach różowym, białym i niebieskim były 24,14 i 62. Przeprowadź na poziomie istotności 0.01 test czy różnica pomiędzy obserwowaną a wynikającą z teorii liczbą kwiatów o tych kolorach jest istotna.[TABLICE χ^2]

Zadanie **5. (8 punktów)**
Dla następującego równania

$$(t-1)x'(t) = tx(t),\ t \in \mathbb{R},$$

a) wyznaczyć jedno rozwiązanie spełniające $x(2) = 1$,

b) znaleźć przynajmniej dwa rozwiązania spełniające $x(1) = 0$,

c) wykazać, że nie istnieje rozwiązanie spełniające $x(1) = 1$.

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 27.06.2005
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

Zadanie **1. (8 punktów)**

Dane jest następujące zagadnienia programowania liniowego:
Zminimalizować
$$\sum_{i=1}^{n} i x_i,$$
przy ograniczeniach
$$\sum_{i=1}^{k} x_i \geqslant k, \quad k=1,\ldots,n,$$
$$x_i \geqslant 0, \quad i=1,\ldots,n,$$
(a) sprawdź, czy wektor $x^0=(n,0,\ldots,0)$ jest optymalnym rozwiązaniem tego zagadnienia;
(b) podaj optymalną wartość funkcji celu.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Załóżmy, że funkcja przeżycia wyraża się wzorem $s(x)=P(T>x)=1-\frac{x}{90}$ dla $x\in[0,90]$ oraz że zachodzi hipoteza jednostajności (HU).
1) Obliczyć prawdopodobieństwo, że 50-latek umrze pomiędzy 50,5 i 51,5 rokiem życia.
2) Wyznaczyć JSN dla czystego ubezpieczenia na dożycie na 2 lata dla osoby w wieku 50 lat. Przyjąć stopę procentową $i=10\%$.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech $S_1=\sum_0^{N_1} X_i, S_2=\sum_0^{N_2} Y_i$ będą niezależnymi sumarycznymi szkodami losowymi, gdzie N_1,N_2 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Poissona z parametrem 2, a X_i,Y_i, $i\geqslant 1$ $(X_0=Y_0=0)$ mają odpowiednio rozkład równomierny na zbiorze $\{2,4\}$ oraz $\{4,6\}$. Dla $S=S_1+S_2$ obliczyć:
1) $P(S=0)$;
2) ES.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Liczba odmian o kolorze różowym, białym i niebieskim dla pewnego gatunku kwiatów jest w stosunku 3:2:5. W 100 losowo wybranych próbkach odpowiednie liczby kwiatów o kolorach różowym, białym i niebieskim były 24,14 i 62. Przeprowadź na poziomie istotności 0.01 test czy różnica pomiędzy obserwowaną a wynikającą z teorii liczbą kwiatów o tych kolorach jest istotna.[TABLICE χ^2]

Zadanie **5. (8 punktów)**

Dla następującego równania
$$(t-1)x'(t)=tx(t),\ t\in\mathbb{R},$$

a) wyznaczyć jedno rozwiązanie spełniające $x(2) = 1$,

b) znaleźć przynajmniej dwa rozwiązania spełniające $x(1) = 0$,

c) wykazać, że nie istnieje rozwiązanie spełniające $x(1) = 1$.

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 27.06.2005
Matematyka z informatyką

Zadanie **1. (8 punktów)**
Mamy następującą deklarację B–drzewa

```
typedef struct StTree
{
   char c;
   int n;
   struct StTree *L,*P;
} TStTree;
typedef TStTree *PStTree;
```

oraz został wykonany następujący fragment programu:

```
   TStTree B,C;
   PStTree A,w;
   int i;

   A    = (PStTree)malloc(sizeof(TStTree));
   A->n = 0;
   A->c = 'a';
   A->L = &B;
   A->P = &C;
   B.n  = 0;
   B.c  = 'b';
   B.L  = A;
   B.P  = &B;
   C.n  = 0;
   C.c  = 'c';
   C.L  = &C;
   C.P  = A;
   w = A;
   i = 0;
   do {
         w->n++;
         switch(w->c)
         {
            case 'a':
            case 'b':
              w = (w->n%2 ?w->P:w->L);
             break;
            case 'c':
              w = (w->n%2 ?w->L:w->P);
```

```
            break;
        }
        ++i;
    } while(w->n<3);
```

Jakie w wyniku tego, wartości przyjmą zmienne:

1. `A->n`,
2. `B.n`,
3. `C.n`,
4. `i`.

Zadanie **2. (8 punktów)**
Jaka jest najmniejsza liczba rzeczywista dodatnia dla liczb komputerowych mających 3 bitową mantysę, 2 bitową cechę oraz bias (odchylenie) -1 w przedstawieniu:

1. swobodnym,
2. znormalizowanym,
3. de–znormalizowanym,
4. znormalizowanym z ukrytym bitem,

Zadanie **3. (8 punktów)**
Niech

$$w = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad A = I - ww^T.$$

Wykazać, że wtedy $|\det(A)| = 1$.

Zadanie **4. (8 punktów)**
Liczba odmian o kolorze różowym, białym i niebieskim dla pewnego gatunku kwiatów jest w stosunku 3:2:5. W 100 losowo wybranych próbkach odpowiednie liczby kwiatów o kolorach różowym, białym i niebieskim były 24,14 i 62. Przeprowadź na poziomie istotności 0.01 test czy różnica pomiędzy obserwowaną a wynikającą z teorii liczbą kwiatów o tych kolorach jest istotna.[TABLICE χ^2]

Zadanie **5. (8 punktów)**
Dla następującego równania

$$(t-1)x'(t) = tx(t),\ t \in \mathbb{R},$$

a) wyznaczyć jedno rozwiązanie spełniające $x(2) = 1$,

b) znaleźć przynajmniej dwa rozwiązania spełniające $x(1) = 0$,

c) wykazać, że nie istnieje rozwiązanie spełniające $x(1) = 1$.

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 27.06.2005
Matematyka nauczycielska

Zadanie **1. (8 punktów)**
Rozważmy stwierdzenie:
Liczba jest podzielna przez 4 wtedy i tylko wtedy, gdy suma jej cyfr w systemie pozycyjnym o podstawie k jest podzielna przez 4.
a) Czy jest ono prawdziwe dla $k=8$?
b) Czy jest ono prawdziwe dla $k=9$?
c) Czy jest ono prawdziwe dla $k=10$?
Odpowiedź uzasadnić.

Zadanie **2. (8 punktów)**
Podać równania pewnych dwóch prostych a i b takich, że złożenie odbić $S_a \circ S_b$ (symetrii osiowych względem tych prostych) jest obrotem względem punktu $P(2,1)$ o kąt $60°$. Odpowiedź uzasadnić.

Zadanie **3. (8 punktów)**
Niech o oznacza okrąg o równaniu $x^2+y^2=4$ i niech $A(1,0)$. Zbiór punktów P takich, że odległość AP jest równa odległości punktu P od okręgu o tworzy elipsę. Wyznaczyć jej równanie; podać długości półosi.

Zadanie **4. (8 punktów)**
Liczba odmian o kolorze różowym, białym i niebieskim dla pewnego gatunku kwiatów jest w stosunku 3:2:5. W 100 losowo wybranych próbkach odpowiednie liczby kwiatów o kolorach różowym, białym i niebieskim były 24,14 i 62. Przeprowadź na poziomie istotności 0.01 test czy różnica pomiędzy obserwowaną a wynikającą z teorii liczbą kwiatów o tych kolorach jest istotna.[TABLICE χ^2]

Zadanie **5. (8 punktów)**
Dla następującego równania

$$(t-1)x'(t)=tx(t),\ t\in\mathbb{R},$$

a) wyznaczyć jedno rozwiązanie spełniające $x(2)=1$,

b) znaleźć przynajmniej dwa rozwiązania spełniające $x(1)=0$,

c) wykazać, że nie istnieje rozwiązanie spełniające $x(1)=1$.

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 27.06.2005
Zastosowania

Zadanie **1. (8 punktów)**

Niech $\{B(t); t \geqslant 0\}$ będzie standardowym ruchem Browna, $a > 0$. Znaleźć rozkłady graniczne, gdy $n \to \infty$, dla

a) $\dfrac{B(an)}{n}$;

b) $\dfrac{B(an)}{\sqrt{n}}$.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Zmienna losowa X_n, $n \geqslant 1$ ma rozkład $\chi^2(n)$. Wykazać, że

$$\frac{X_n - n}{\sqrt{2n}} \to_{\mathrm{d}} N(0,1),$$

gdy $n \to \infty$.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech $(X_1, \ldots, X_n)$ będzie wynikiem n niezależnych doświadczeń, polegających na zliczaniu ilości orłów otrzymanych przy rzucie 10-cioma monetami o nieznanym prawdopodobieństwie wypadnięcia orła θ. Korzystając z kryterium faktoryzacji wyznaczyć statystykę dostateczną dla θ. Czy otrzymana statystyka jest minimalną statystyką dostateczną? Odpowiedź uzasadnić.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste a takie, że łańcuch Markowa o macierzy prawdopodobieństw przejść

$$\begin{pmatrix} a^3 & 1-a^2 & (1-a)/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

ma dokładnie jeden rozklad stacjonarny. Podać ten rozkład.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Dla następującego równania

$$(t-1)x'(t) = tx(t), \ t \in \mathbb{R},$$

a) wyznaczyć jedno rozwiązanie spełniające $x(2) = 1$,

b) znaleźć przynajmniej dwa rozwiązania spełniające $x(1) = 0$,

c) wykazać, że nie istnieje rozwiązanie spełniające $x(1) = 1$.