

ZADANIE 1. Rozważmy stwierdzenie:

Liczba jest podzielna przez 4 wtedy i tylko wtedy, gdy suma jej cyfr w systemie pozycyjnym o podstawie k jest podzielna przez 4.

- a) Czy jest ono prawdziwe dla $k = 8$?
 b) Czy jest ono prawdziwe dla $k = 9$?
 c) Czy jest ono prawdziwe dla $k = 10$?

ROZWIĄZANIE. (szkic)

- a) NIE, bowiem liczba $[10]_8 = [8]_{10}$ jest podzielna przez 4, a suma $1 + 0$ – nie.
 b) TAK. Najpierw zauważmy, że $9^j - 1 = (9 - 1) \cdot (9^{j-1} + 9^{j-2} + \dots + 9^1 + 1)$, więc 4 dzieli $9^j - 1$ dla $j = 1, 2, \dots$. Ponieważ $\sum_{k=1}^n a_k \cdot 9^{k-1} = \sum_{k=2}^n a_k \cdot (9^{k-1} - 1) + \sum_{k=1}^n a_k$,

więc 4 dzieli $[a_n \dots a_1]_9 \Leftrightarrow 4$ dzieli sumę cyfr $\sum_{k=1}^n a_k$

- c) NIE, bowiem liczba $[20]_{10}$ jest podzielna przez 4, a suma $2 + 0$ – nie.

ZADANIE 2. Podać równania pewnych dwóch prostych a i b takich, że złożenie odbić $S_a \circ S_b$ (symetrii osiowych względem tych prostych) jest obrotem względem punktu $P(2, 1)$ o kąt 60° . Uzasadnić odpowiedź.

ROZWIĄZANIE. (szkic)

Wiadomo, że złożenie symetrii względem przecinających się prostych jest obrotem względem punktu przecięcia tych prostych o kąt będący dwukrotnością kąta przecięcia tych prostych. Zatem proste a, b powinny przechodzić przez punkt P i przecinać się pod kątem 30° ; np.: $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 2) + 1$, $y = 1$.

ZADANIE 3. Niech o oznacza okrąg o równaniu $x^2 + y^2 = 4$ i niech $A(1, 0)$. Zbiór punktów P takich, że odległość AP jest równa odległości punktu P od okręgu o tworzy elipsę. Wyznaczyć jej równanie; podać długości półosi.

ROZWIĄZANIE. (szkic)

Oczywiście P musi leżeć we wnętrzu okręgu o i jego odległość od o jest równa $2 - SP$, gdzie $S(0, 0)$. Zatem warunek $2 - SP = AP$ daje równanie:

$$2 - \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}$$

skąd podnosząc do kwadratu dostajemy

$$4 - 4\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2.$$

Po uporządkowaniu i podniesieniu jeszcze raz do kwadratu mamy:

$$16(x^2 + y^2) = (3 + 2x)^2$$

co daje (po dalszych nietrudnych przekształceniach) odpowiedź:

$$\frac{(x - \frac{1}{2})^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{3}{4}} = 1.$$

Półosie mają długość: 1 i $\sqrt{3}/2$. (Ogniskami są punkty: S i P .)