EGZAMIN DYPLOMOWY, część I (zadania otwarte)
23.06.2005

Zadanie **1. (3 punkty)**

Wyznaczyć wartość parametru A, dla której funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{3x} - e^{2x} - x}{x^2} & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ A & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze oraz obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru.

Zadanie **2. (3 punkty)**

Obliczyć objętość bryły

$$\{(x,y,z) : x^4 + 2x^2y^2 + y^4 \leqslant z \leqslant A\}$$

w zależności od parametru dodatniego A.

Zadanie **3. (3 punkty)**

Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x,y) = x - 2y + |2x|$$

na okręgu $C = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$. Wyznaczyć wszystkie punkty okręgu, w których wartości najmniejsza i największa są osiągane.

Zadanie **4. (3 punkty)**

Dane są macierze kwadratowe A i B o wymiarach 3×3 i wyrazach rzeczywistych. Wektor $v \in \mathbb{R}^3$ jest jednocześnie wektorem własnym macierzy A i wektorem własnym macierzy B. Dowieść, że wektor v jest wektorem własnym macierzy AB.

Zadanie **5. (3 punkty)**

Dana jest grupa nieabelowa (nieprzemienna) G oraz jej elementy a, b spełniające warunki:

1° rząd elementu ab^4 jest równy 7,

2° $a = b^{-1}$.

Wyznaczyć rząd elementu b, jeśli wiadomo, że jest on liczbą pierwszą.

Zadanie **6. (2+3=5 punktów)**

a) Obliczyć prawdopodobieństwo P_n tego, że w $2n + 2005$ rzutach symetryczną monetą wypadło $n + 2005$ orłów i n reszek.

b) Ile razy powinniśmy rzucić symetryczną monetą, aby zmaksymalizować prawdopodobieństwo zdarzenia, że liczba wyrzuconych orłów będzie większa od liczby wyrzuconych reszek dokładnie o 2005 ?

Wskazówka: Porównać prawdopodobieństwa P_n dla różnych n rozważając ilorazy P_{n+1}/P_n.