Rozwiązanie zadania 1

Mamy wyznaczyć min i max dla funkcji

$$f(x,y,z) = x^2 + xy + z^2$$

na okręgu

$$A = \{(x,y,x) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ \wedge \ x + y + z = 1\}.$$

Dla $(x,y,z) \in A$ zachodzi $z = -(x+y)$ – jest to drugi warunek, co podstawiając do pierwszego warunku $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ określającego zbiór A otrzymujemy, iż

$$\begin{aligned} 1 &= x^2 + y^2 + z^2 \ = \ x^2 + y^2 + (x+y)^2 = x^2 + y^2 + x^2 + 2xy + y^2 \ = \\ &= 2(x^2 + xy + y^2) \end{aligned}$$

Stąd mamy, że funkcja

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2}, \quad \text{dla} \quad (x,y,z) \in A$$

na okręgu A przyjmuje tylko jedną wartość (jest na nim stała). Stąd

$$\min_{(x,y,z)\in A} f(x,y,z) = \max_{(x,y,z)\in A} f(x,y,z) = \frac{1}{2}$$

i wartość min i max jest przyjmowana w każdym punkcie okręgu A.

Rozwiązanie zadania 2

Niech $a_n = \frac{6^n}{\binom{3n}{n}} = \frac{6^n\,(2n)!\,n!}{(3n)!}$. Wtedy

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{6^{n+1}\,(2n+2)!\,(n+1)!}{(3n+3)!}\,\frac{(3n)!}{6^n\,(2n)!\,n!} = 6\,\frac{(2n+1)(2n+2)(n+1)}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} = \\ &= 6\,\frac{(2+\frac{1}{n})(2+\frac{2}{n})(1+\frac{1}{n})}{(3+\frac{1}{n})(3+\frac{2}{n})(3+\frac{3}{n})} \end{aligned}$$

Stąd mamy, iż

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 6\,\frac{4}{27} = \frac{8}{9} < 1$$

i na podstawie kryterium *d'Alemberta* stwierdzamy, że szereg jest zbieżny.

Rozwiązanie zadania 3

Liczymy

$$\int_0^1\int_y^1 e^{x^2}\,dx\,dy \ = \ \int_0^1\int_0^x e^{x^2}\,dy\,dx \ = \ \int_0^1 x\,e^{x^2}\,dx \ = \ \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1 \ = \ \frac{1}{2}(e-1).$$

Rozwiązanie zadania 4

Ponieważ $2 \neq 3$, to wektory własne w i v są liniowo niezależne. Dla macierzy $A+B$ mamy:

$$\begin{aligned}(A+B)(v+w) &= (A+B)v+(A+B)w = Av+Bv+Aw+Bw = \\ &= 2v+7v+3w+\lambda w = 9v+(3+\lambda)w = \mu(v+w).\end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy, iż

$$(9-\mu)v+(3+\lambda-\mu)w=0$$

oraz

$$\mu=9 \quad \text{i} \quad \lambda=6.$$

Rozwiązanie zadania 5

Przykład grupy nieabelowej w której istnieje element rzędu 2, istnieje element rzędu 3 i nie istnieje element rzędu 6.

Weźmy grupę S_3 permutacji zbioru trzyelementowego (izometrii własnych trójkąta równobocznego). Wtedy każdy z cykli (transpozycji)

$$\sigma_1=(1,2), \quad \sigma_2=(2,3), \quad \sigma_3=(1,3)$$

jest rzędu 2 bo np. dla σ_1 mamy:

$$\sigma_1^2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=e.$$

Każdy z cykli

$$\sigma_4=(1,2,3), \quad \sigma_5=(1,3,2)$$

jest rzędu 3 bo np.

$$\sigma_4^2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=\sigma_5$$

i dalej

$$\sigma_4^3=\sigma_5\circ\sigma_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=e.$$

Grupa $S_3=\{e, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5\}$ ma 6 elementów wśród których nie ma elementu rzędu 6. Pozostało wykazanie, że grupa ta jest nieabelowa. Weźmy elementy $\sigma_1, \sigma_2 \in S_3$ i policzmy:

$$\sigma_1\circ\sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=\sigma_4$$

oraz

$$\sigma_2\circ\sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=\sigma_5$$

W ten sposób otrzymaliśmy, że

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 \neq \sigma_2 \circ \sigma_1.$$

Rozwiązanie zadania 6

Model: *permutacje z powtórzeniami.* Mamy:

$$\begin{aligned}
|\Omega| &= \binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13} = \frac{52!}{13!\,39!}\cdot\frac{39!}{13!\,26!}\cdot\frac{26!}{13!\,13!} = \frac{52!}{(13!)^4}\\
|A| &= \binom{48}{12}\binom{36}{12}\binom{24}{11} = \frac{48!}{12!\,36!}\cdot\frac{36!}{12!\,24!}\cdot\frac{24!}{11!\,13!} = \frac{48!}{(12!)^2\,11!\,13!}\\
|B| &= \binom{51}{13}\binom{38}{12}\binom{26}{13} = \frac{51!}{13!\,38!}\cdot\frac{38!}{12!\,26!}\cdot\frac{26!}{13!\,13!} = \frac{51!}{(13!)^3\,12!}\\
P(A\cap B) &= \binom{47}{12}\binom{35}{11}\binom{24}{11} = \frac{47!}{12!\,35!}\cdot\frac{35!}{11!\,24!}\cdot\frac{24!}{11!\,13!} = \frac{47!}{12!\,13!\,(11!)^2}
\end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned}
P(A) &= \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{48!}{(12!)^2\,11!\,13!}\cdot\frac{(13!)^4}{52!} = \frac{13^2}{17\cdot 49\cdot 50}\\
P(B) &= \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{51!}{(13!)^3\,12!}\cdot\frac{(13!)^4}{52!} = \frac{1}{4}\\
P(A\cap B) &= \frac{|A\cap B|}{|\Omega|} = \frac{47!}{12!\,13!\,(11!)^2}\cdot\frac{(13!)^4}{52!} = \frac{13^2}{4\cdot 17\cdot 49\cdot 50}
\end{aligned}$$

I teraz stwierdzamy, iż

$$P(A)\cdot P(B) = \frac{13^2}{17\cdot 49\cdot 50}\cdot\frac{1}{4} = \frac{13^2}{4\cdot 17\cdot 49\cdot 50} = P(A\cap B).$$

W ten sposób wykazaliśmy, że zdarzenia A i B są niezależne.

Wrocław, dnia 22 września 2005