

**EGZAMIN DYPLOMOWY, część I (zadania otwarte)**  
**20.09.2005**

**Zadanie 1.** Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x, y, z) = x^2 + xy + y^2$$

na okręgu zdefiniowanym równaniami

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad x + y + z = 0.$$

Wyznaczyć wszystkie punkty okręgu, w których wartości najmniejsza i największa są osiąmane.

**Zadanie 2.** Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{\binom{3n}{n}}.$$

**Zadanie 3.** Obliczyć całkę

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dx dy.$$

**Wskazówka:** Zmienić kolejność całkowania.

**Zadanie 4.** Dane są macierze kwadratowe  $A, B$  o wymiarach  $3 \times 3$  oraz niezerowe wektory

$v, w \in \mathbb{R}^3$  o następujących własnościach:

- wektor  $v$  jest wektorem własnym macierzy  $A$  dla wartości własnej 2,
- wektor  $w$  jest wektorem własnym macierzy  $A$  dla wartości własnej 3,
- wektor  $v$  jest wektorem własnym macierzy  $B$  dla wartości własnej 7,
- wektor  $w$  jest wektorem własnym macierzy  $B$  dla wartości własnej  $\lambda$ .

Wyznaczyć wszystkie wartości  $\lambda$ , dla których z powyższych założeń wynika, że wektor  $v+w$  jest wektorem własnym macierzy  $A+B$ .

**Zadanie 5.** Podać przykład grupy nieabelowej, w której istnieje element rzędu 2 i istnieje element rzędu 3, a nie istnieje element rzędu 6.

**Zadanie 6.** Tomek, Witek, Xawery i Zenek grają w brydża. W jednym rozdaniu otrzymują po 13 kart z talii liczącej 52 karty.

Niech  $A$  będzie zdarzeniem:

• Tomek dostał asa trefl, Witek dostał asa pik, a Xawery dostał pozostałe dwa asy (kier i karo).

Niech  $B$  będzie zdarzeniem:

- Witek dostał waleta trefl.

Rozstrzygnąć, czy zdarzenia  $A$  i  $B$  są niezależne.

Zadania 1, 6 po 4 punkty, pozostałe po 3 punkty.