

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 15.02.2006
Biomatematyka

Zadanie **1.** (8 punktów)

Założmy, że częstości genotypów AA , Aa i aa w populacji znajdującej się w warunkach Hardy'ego-Wainberga wynoszą p^2 , $2pq$ i q^2 . Wiadomo, że badany mężczyzna należy do genotypu Aa . Wyznacz prawdopodobieństwo, że jego brat należy do tego samego genotypu.

Zadanie **2.** (8 punktów)

Niech X_1, \dots, X_n będzie próbą prostą pochodzącą z rozkładu jednostajnego na przedziale $(0, \theta)$, gdzie $\theta > 0$. Wyznaczyć taką stałą a , przy której statystyka

$$T = a \min(X_1, \dots, X_n)$$

jest nieobciążonym estymatorem θ .

Zadanie **3.** (8 punktów)

Niech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie

$$P(X_n = -1) = p \quad \text{oraz} \quad P(X_n = 1) = 1 - p.$$

Niech dla $n \geq 0$

$$Y_n = X_n \cdot X_{n+1}.$$

1. Czy ciąg zmiennych losowych $\{Y_n\}_0^{\infty}$ tworzy łańcuch Markowa?
2. W przypadku, gdy odpowiedź jest pozytywna, podaj postać rozkładu stacjonarnego.

Zadanie **4.** (8 punktów)

Organizacja konsumentów twierdzi, że oczekiwany czas życia żarówek jest krótszy od 1000 godzin. Średni czas życia wylosowanych przez nią 100 żarówek wyniósł 998 godzin, a oszacowane z próby odchylenie standardowe 7 godzin. Sprawdź na poziomie istotności 0.01 czy organizacja ma rację.

Wskazówka. Skorzystaj z centralnego twierdzenia granicznego.

Zadanie **5.** (8 punktów)

Metodą szeregów potęgowych rozwiązać następujące zagadnienie początkowe

$$tx''(t) - tx'(t) - x(t) = 0,$$
$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 15.02.2006
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

Zadanie **1.** (8 punktów)

Wiadomo, że ${}_{0.5}p_{44} = 0.9$ oraz $l_{45} = 81000$. Przy założeniu hipotezy jednostajności wyznaczyć:

- a) prawdopodobieństwo ${}_{0.75}q_{44}$ tego, że 44-latek umrze w przeciągu najbliższych 9 miesięcy;
b) l_{44} - średnią liczbę członków kohorty dożywających powyżej 44 lat.

Zadanie **2.** (8 punktów)

Założmy, że niezależne szkody $X_i, i \geq 1$ ($X_0 = 0$) mają rozkład

$$P(X_i = 0) = 1 - P(X_i = 2) = x.$$

Niech ilość szkód N ma rozkład Poissona z parametrem 2 oraz $S = \sum_0^N X_i$. Wiadomo, że $ES = 1$.

- a) Ile wynosi x ?
b) Obliczyć $P(S \geq 2)$.

Zadanie **3.** (8 punktów)

Przy ustalaniu dobowej racji żywieniowej dla zwierząt hodowlanych (cieląt) wykorzystuje się paszę A (w ilości nie większej niż 50 kg) oraz paszę B (w ilości nie większej niż 85 kg). Racja żywieniowa powinna m.in. zawierać składniki odżywcze: białko (nie mniej niż 1 kg), wapno (nie mniej niż 10 dkg), magnez (nie mniej niż 6 dkg) oraz fosfor (nie mniej niż 8 dkg). Zawartości wymienionych składników (w gramach) w 1 kg paszy oraz koszty własne 1 kg paszy są następujące:

pasza	białko	wapno	magnez	fosfor	koszt
A	40	1.25	1	2	1.2
B	10	2.5	1	1	0.8

Ustal optymalną rację żywieniową przy warunku minimalnych kosztów własnych. Ile wynosi ich wartość?

Zadanie **4.** (8 punktów)

Organizacja konsumentów twierdzi, że oczekiwany czas życia żarówek jest krótszy od 1000 godzin. Średni czas życia wylosowanych przez nią 100 żarówek wyniósł 998 godzin, a oszacowane z próby odchylenie standardowe 7 godzin. Sprawdź na poziomie istotności 0.01 czy organizacja ma rację.

Wskazówka. Skorzystaj z centralnego twierdzenia granicznego.

Zadanie **5.** (8 punktów) jak dla pozostałych specjalności.

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 15.02.2006
Matematyka z informatyką

Zadanie 1. (8 punktów)

Dla 5-cio elementowej listy określonej przez deklarację

```
struct StRec
{
    int n;
    struct StRec *next;
};
```

napisać funkcję w języku C, która usunie jej trzeci element licząc od początku (root'a). Można założyć, że pole n określa, który to jest element, np. n==2 oznacza drugi element.

Zadanie 2. (8 punktów)

Wykazać, że metoda *Jacobiego iteracyjnego rozwiązywania układu równań liniowych* zastosowana do układu

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 = -1 \\ 2x_1 + 20x_2 = 1 \end{cases}$$

jest zbieżna.

Zadanie 3. (8 punktów)

Wielomiany *Czebyszewa* są określone wzorem:

$$T_n(x) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ x, & n = 1 \\ 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), & n > 1 \end{cases}$$

Wyznaczyć pierwiastki wielomianu $T_5(x)$.

Zadanie 4. (8 punktów)

Organizacja konsumentów twierdzi, że oczekiwany czas życia żarówek jest krótszy od 1000 godzin. Średni czas życia wylosowanych przez nią 100 żarówek wyniósł 998 godzin, a oszacowane z próby odchylenie standardowe 7 godzin. Sprawdź na poziomie istotności 0.01 czy organizacja ma rację.

Wskazówka. Skorzystaj z centralnego twierdzenia granicznego.

Zadanie 5. (8 punktów)

Metodą szeregów potęgowych rozwiązać następujące zagadnienie początkowe

$$\begin{aligned} tx''(t) - tx'(t) - x(t) &= 0, \\ x(0) &= 0, \quad x'(0) = 1. \end{aligned}$$

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 15.02.2006
Matematyka nauczycielska

Zadanie **1.** (6 punktów)

Sformułować twierdzenie opisujące postać najmniejszej wspólnej wielokrotności trzech liczb naturalnych o znanych przedstawieniach w postaci iloczynu potęg liczb pierwszych.

Zadanie **2.** (9 punktów)

W czworościanie o wierzchołkach $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ środki ciężkości ścian są wierzchołkami nowego czworościanu. Wyznaczyć stosunek objętości tych czworościanów. Czy któryś z nich jest foremny?

Zadanie **3.** (9 punktów)

Dany jest okrąg o środku S i promieniu 2 oraz punkt P tego okręgu. Uzasadnić, że środki wszystkich cięciw o końcu w P leżą na pewnym okręgu. (Określić jego środek i promień.)

Zadanie **4.** (8 punktów)

Organizacja konsumentów twierdzi, że oczekiwany czas życia żarówek jest krótszy od 1000 godzin. Średni czas życia wylosowanych przez nią 100 żarówek wyniósł 998 godzin, a oszacowane z próby odchylenie standardowe 7 godzin. Sprawdź na poziomie istotności 0.01 czy organizacja ma rację.

Wskazówka. Skorzystaj z centralnego twierdzenia granicznego.

Zadanie **5.** (8 punktów)

Metodą szeregów potęgowych rozwiązać następujące zagadnienie początkowe

$$\begin{aligned}tx''(t) - tx'(t) - x(t) &= 0, \\x(0) &= 0, \quad x'(0) = 1.\end{aligned}$$

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 15.02.2006
Zastosowania

Zadanie **1.** (8 punktów)

Niech $\{B_1(t); t \geq 0\}$, $\{B_2(t); t \geq 0\}$ będą niezależnymi standardowymi ruchami Browna, $a > 0$. Znaleźć wszystkie $a \in \mathbb{R}$, dla których

$$W(t) = \begin{cases} B_1(t) & \text{dla } t \in [0, T] \\ B_1(T) - 2B_2(a(t-T)) & \text{dla } t > T \end{cases}$$

jest standardowym ruchem Browna. Odpowiedź uzasadnić.

Zadanie **2.** (8 punktów)

Niech X oraz $Y = 2X$ będą zmiennymi losowymi o ciągłych dystrybuantach F, G odpowiednio. Obliczyć

- a) $E(F(X))$
- b) $E(F(X)G(Y))$.

Zadanie **3.** (8 punktów)

Na podstawie jednej obserwacji X weryfikuje się hipotezę H : X ma rozkład normalny $N(0,1)$ przeciwko hipotezie alternatywnej K : X ma rozkład Laplace'a o gęstości $e^{-|x|}/2$, $x \in \mathbb{R}$. Skonstruować najmocniejszy test na poziomie istotności $\alpha \in (0,1)$.

Zadanie **4.** (8 punktów)

Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{i=1}^{\infty} X_i$ niezależnych zmiennych losowych X_1, X_2, \dots , gdzie

$$P(X_i = 2^{-i}) = P(X_i = 0) = 1/2.$$

Zadanie **5.** (8 punktów)

Metodą szeregów potęgowych rozwiązać następujące zagadnienie początkowe

$$\begin{aligned} tx''(t) - tx'(t) - x(t) &= 0, \\ x(0) &= 0, \quad x'(0) = 1. \end{aligned}$$