EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 20.06.2006
Biomatematyka

Zadanie **1. (8 punktów)**
Niech a będzie recesywnym płciowo skojarzonym genem i załóżmy, że proces selekcji uniemożliwia kojarzenie się osobników płci męskiej o genotypie aa. Przyjmijmy, że genotypy AA, Aa i aa występują w populacji żeńskiej początkowo z częstościami u, $2v$ oraz w.

1. Wyznacz częstości genotypów AA, Aa i aa dla potomków płci żeńskiej pierwszego pokolenia.
2. Wykaż, że częstość występowania genów a w populacji żeńskiej redukuje się o połowę.

Zadanie **2. (8 punktów)**
Przypuśćmy, że normalna częstość infekcji pewnej choroby wśród bydła wynosi 25 procent. Dla sprawdzenia skuteczności nowej szczepionki zaszczepiono nią n sztuk bydła. Zaproponuj procedurę statystyczną na podstawie której można przetestować hipotezę o skuteczności działania szczepionki.

Zadanie **3. (8 punktów)**
Niech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem niezależnych całkowitoliczbowych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie

$$P(X_n = k) = p_k,\ k = 0, 1, 2, ...$$

Niech dla $n \geqslant 0$,

$$Y_n = \sum_{i=0}^{n} X_i.$$

1. Udowodnij, że ciąg zmiennych losowych $\{Y_n\}_0^{\infty}$ tworzy jednorodny łańcuch Markowa.
2. Podaj postać macierzy prawdopodobieństw przejść tego łańcucha.

Zadanie **4. (8 punktów)**
Zmierzono puls losowo wybranych 25 pracowników pewnego zakładu. Średni puls i odchylenie standardowe wyniosły odpowiednio 75 i 5 uderzeń na minutę. Oblicz 97% przedział ufności dla oczekiwanej wartości pulsu wszystkich pracowników tego zakładu.
Wskazówka. Przyjmij, że puls ma rozkład normalny.

Zadanie **5. (8 punktów)** jak dla pozostałych specjalności.

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 20.06.2006
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

Zadanie **1. (8 punktów)**

Załóżmy, że funkcja przeżycia wyraża się wzorem

$$s(x) = P(T > x) = 1 - \frac{x}{100}$$

dla $x \in [0,100]$ oraz że zachodzi hipoteza jednostajności (HU).
a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że 20-latek umrze przed ukończeniem 30-tego roku życia.
b) Wyznaczyć JSN dla renty 30-latka polegającej na wypłacie kwoty 1, gdy żyje on pod koniec 2 roku trwania renty oraz kwoty 10, gdy żyje on pod koniec 3 roku trwania renty. Przyjąć stopę procentową $i = 10\%$.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Ryzyko X ma rozkład $P(X=0)=0.5$, $P(X=1)=0.3$, $P(X=2)=x$ oraz $P(X=3)=1-x$. Wiadomo, że $E(I_1(X))=0.5$, gdzie $I_d(X)$ oznacza kontrakt stop-loss.
a) Ile wynosi x ?
b) Obliczyć $Var(I_1(X))$.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Do wytworzenia dwóch rodzajów produktów A oraz B zużywa się pewne ilości stali i metali kolorowych oraz wykorzystuje tokarki i frezarki. Rozmiary zasobów oraz normy zużycia poszczególnych zasobów na jednostkę wyrobu przedstawia następująca tabela:

zasoby	rozmiary zasobów	zużycie dla A	zużycie dla B
stal [kg]	570	10	70
metale kol. [kg]	420	20	50
tokarki [h]	5600	300	400
frezarki [h]	3400	200	100

Wiedząc, że zysk z wyrobu A wynosi 300, a z wyrobu B – 800, wyznacz plan produkcji zapewniający maksymalny zysk. Podaj jego wartość oraz wykorzystanie poszczególnych zasobów przy realizacji optymalnego planu produkcji.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Zmierzono puls losowo wybranych 25 pracowników pewnego zakładu. Średni puls i odchylenie standardowe wyniosły odpowiednio 75 i 5 uderzeń na minutę. Oblicz 97% przedział ufności dla oczekiwanej wartości pulsu wszystkich pracowników tego zakładu.

Wskazówka. Przyjmij, że puls ma rozkład normalny.

Zadanie **5. (8 punktów)** jak dla pozostałych specjalności.

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 20.06.2006
Matematyka z informatyką

Zadanie **1. (8 punktów)**
Dla danego ciągu m_i, $i=1,2,\ldots,n$ liczb typu `int` napisać funkcję w języku **C**, która utworzy uporządkowaną rosnąco względem pola n listę określoną deklaracją

```
struct StRec
{
   int n;
   struct StRec *next;
};
```

gdzie jako wartości pola `n` wystąpią wszystkie wyrazy ciągu m_i, $i=1,2,\ldots,n$.

Zadanie **2. (8 punktów)**
Wyznaczyć macierz *Hauseholdera* $H \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ o własności:

$$H\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Zadanie **3. (8 punktów)**
Niech $w_2(x)$ będzie *wielomianem interpolacyjnym* wyznaczonym przez

x	x_0	x_1	x_2
y	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$

funkcji $f \in C^3[-1,1]$, gdzie $x_i \in [-1,1]$ oraz $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$.

1. Wyznaczyć, przy pomocy wielomianu $w_2(x)$ wzór na przybliżone obliczenie całki $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.
2. Jak można oszacować różnicę
$$\left| \int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \int_{-1}^{1} w_2(x)\,dx \right| \leqslant ?$$
gdy punkty x_i, $i=0,1,2$ są zerami *wielomanu Czebyszewa* $T_3(x)$?

Zadanie **4. (8 punktów)** jak dla pozostałych specjalności (oprócz zastosowań).

Zadanie **5. (8 punktów)** jak dla pozostałych specjalności.

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 20.06.2006
Matematyka nauczycielska

Zadanie **1. (8 punktów)**
Wyznaczyć największą liczbę naturalną k taką, że 2^k dzieli liczbę $2^{2006}!$.

Zadanie **2. (8 punktów)**
Środki krawędzi czworościanu o wierzchołkach $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ są wierzchołkami nowego wielościanu. Wyznacz jego objętość i pole powierzchni.

Zadanie **3. (8 punktów)**
Niech J_A oznacza jednokładność o środku $A(3,0)$ i skali 2 i niech J_B oznacza jednokładność o środku $B(0,4)$ i skali 3. Uzasadnij, że złożenie $J_B \circ J_A$ jest jednokładnością; podaj środek i skalę.

Zadanie **4. (8 punktów)**
Zmierzono puls losowo wybranych 25 pracowników pewnego zakładu. Średni puls i odchylenie standardowe wyniosły odpowiednio 75 i 5 uderzeń na minutę. Oblicz 97% przedział ufności dla oczekiwanej wartości pulsu wszystkich pracowników tego zakładu.
Wskazówka. Przyjmij, że puls ma rozkład normalny.

Zadanie **5. (8 punktów)**
Rozwiązać następujące zagadnienie początkowe
$$-2x''(t)+x'(t)+x(t)=5e^{2t},$$
$$x(0)=0, \quad x'(0)=-1.$$

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 20.06.2006
Zastosowania

Zadanie **1. (8 punktów)**

Znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste a,b takie, że $(\frac{3}{7},\frac{2}{7},\frac{2}{7})'$ jest rozkładem stacjonarnym łańcucha Markowa o macierzy prawdopodobieństw przejść

$$\begin{pmatrix} a+b & b & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Zadanie **2. (8 punktów)**

Niech X_P będzie czasem pierwszego sukcesu w próbach Bernoulli'ego z prawdopodobieństwem sukcesu w jednej próbie równym p. Wykazać, że pX_p jest słabo zbieżne do rozkładu wykładniczego, gdy $p \to 0$.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Myśliwy ma 2 naboje. Zdarzenia polegające na trafieniu dzika poszczególnymi nabojami (przy jednym wystrzale) są niezależne i prawdopodobieństwo każdego z nich wynosi θ. Myśliwy przerywa strzelanie z chwilą pierwszego trafienia lub wyczerpania się nabojów. Wykonano takie strzelanie. Na podstawie ilości zaobserwowanych strzałów wyznaczyć:
a) estymator największej wiarogodności parametru θ;
b) estymator nieobciążony z minimalną wariancją parametru θ.
Obliczyć ryzyka kwadratowe tych estymatorów.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych jednakowo rozłożonych zmiennych losowych o rozkładzie $P(X_1 = e^{-3}) = P(X_1 = e^3) = 1/2$. Zbadać zbieżność

$$\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{1/n},$$

gdy $n \to \infty$.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Rozwiązać następujące zagadnienie początkowe

$$-2x''(t) + x'(t) + x(t) = 5e^{2t},$$
$$x(0) = 0, \quad x'(0) = -1.$$