**Zadania otwarte 2007-02.**

**1.** Obliczyć sumę szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, gdzie

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad n \quad \text{parzystych} \\ 3 & \text{dla} \quad n \quad \text{nieparzystych} \end{cases}$$

**2.** Obliczyć całkę

$$\int_{16}^{81} \frac{(6-\sqrt{x})\,dx}{6x+x\sqrt{x}} .$$

**3.** Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x,y) = 3x + 4y + 5\left(x^2 + y^2\right)$$

na zbiorze

$$\{(x,y) : x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = x^2 + y^2\} .$$

Wyznaczyć wszystkie punkty, w których wartości najmniejsza i największa są osiągane.

Przyjąć bez dowodu, że funkcja na podanym zbiorze jest ograniczona i osiąga swoje kresy.

**4.** Dane są takie macierze kwadratowe $A$ i $B$ o wymiarach $7\times 7$, że liczba 7 jest wartością własną macierzy $AB$ odpowiadającą wektorowi własnemu $v$.

Dowieść, że liczba 7 jest wartością własną macierzy $BA$.

**5.** Dana jest grupa nieabelowa (nieprzemiennna) $G$ oraz takie jej elementy $a$, $b$, że spełnione są następujące warunki:

- $b^8 = e$,
- $ba = a^{-1}b$.

Dowieść, że $(ab)^8 = e$.

**6.** Zdarzenia losowe $A$, $B$ są niezależne, a ponadto każde z nich ma prawdopodobieństwo różne od 0 i 1.

Niech $C$ będzie zdarzeniem: Zachodzi dokładnie jedno ze zdarzeń $A$ lub $B$.

Dowieść, że jeżeli zdarzenia $A$ i $C$ są niezależne oraz zdarzenia $B$ i $C$ są niezależne, to $P(A) = P(B)$.

Zadania 3 i 6 po 4 punkty, pozostałe po 3 punkty.