EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 16.02.2007
Biomatematyka

Zadanie **1. (8 punktów)**

Niech X_n oznacza proporcję pozycji w nici DNA, które po n replikacjach są obsadzone takimi samymi nukleotydami, jak w chwili początkowej, tak więc $X_0 = 1$. Zakładamy, że w każdej replikacji prawdopodobieństwo, z jakim może nastąpić podstawienie, jest równe α i każdy z trzech możliwych nukleotydów jest jednakowo prawdopodobny.

(a) Znaleźć rozkład zmiennej losowej X_3.

(b) Czy ciąg zmiennych losowych $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ jest zbieżny według rozkładu?

(c) Podać postać rozkładu granicznego.

Zadanie **2. (8 punktów)**

W populacji znajdującej się w warunkach równowagi Hardy'ego-Weinberga częstość allelu a jest równa 0,4, natomiast częstość allelu A jest równa 0,6. Jaka część osobników o genotypie aa

(a) nie miała żadnego z rodziców o genotypie aa?

(b) miała jednego rodzica o genotypie aa?

(c) miała oboje rodziców o genotypie aa?

Zadanie **3. (8 punktów)**

Rozpatrzmy populację, której rozwój opisany jest przez równanie logistyczne

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right); \; N(0) = N_0.$$

Zakładamy, że populacja poddana jest odłowom na stałym poziomie $H > 0$. Wyznaczyć wielkość maksymalnego odłowu H_c, niepowodującego wyniszczenia populacji.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Dla losowej próby 25 obserwacji z rozkładu normalnego o średniej μ i odchyleniu standardowym 4, testujemy hipotezę H_0: $\mu = 0$ przeciwko hipotezie H_1: $\mu = 0.5$. Hipoteza H_0 jest przyjęta, gdy średnia z próby $\overline{x}$ spełnia nierówność $|\overline{x}| < 1.5$, w przeciwnym przypadku jest odrzucana. Obliczyć prawdopodobieństwa błędu I rodzaju (czyli poziomu istotności testu) i błędu II rodzaju dla tego testu.

Zadanie **5. (8 punktów)** jak dla pozostałych specjalności.

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 16.02.2007
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

Zadanie **1. (8 punktów)**

Załóżmy, że zachodzi hipoteza HU oraz $l_{30}=523$, $l_{40}=436$, $l_{41}=427$, $l_{42}=417$.

(a) Obliczyć ${}_{10|1.5}q_{30}$.

(b) Wyznaczyć JSN dla portfela ubezpieczeniowego dla 40-latka tak, aby jeśli śmierć nastąpi w pierwszym roku ubezpieczenia, to wypłata w rocznicę umowy wynosiła 10, a jeśli ubezpieczony przeżyje 2 lata, to wypłacana była kwota 100. Przyjąć stopę procentową $i=10\%$.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Dany jest ciąg $X_1,X_2,\ldots$ niezależnych szkód o rozkładzie równomiernym na zbiorze $\{1,2,3\}$. Wiadomo, że koszt usunięcia szkody X_i jest liniowo zależny od wielkości X_i z losowym współczynnikiem proporcjonalności Y_i, gdzie $Y_1,Y_2,\ldots$ są wzajemnie niezależne o rozkładzie równomiernym na zbiorze $\{1,2\}$. Załóżmy, że ciągi X_i oraz Y_i są wzajemnie niezależne oraz ilość szkód ma rozkład Poissona z parametrem 2. Niech S oznacza całkowity koszt usunięcia wszystkich szkód.

(a) Obliczyć ES.

(b) Obliczyć $P(S>1)$.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Dana jest gra dwuosobowa o sumie zero z macierzą wypłat postaci

$$N=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Znaleźć wartość tej gry oraz strategię optymalną dla każdego gracza.
Czy są one jedyne?

Zadanie **4. (8 punktów)**

Dla losowej próby 25 obserwacji z rozkładu normalnego o średniej μ i odchyleniu standardowym 4, testujemy hipotezę H_0: $\mu=0$ przeciwko hipotezie H_1: $\mu=0.5$. Hipoteza H_0 jest przyjęta, gdy średnia z próby $\overline{x}$ spełnia nierówność $|\overline{x}|<1.5$, w przeciwnym przypadku jest odrzucana. Obliczyć prawdopodobieństwa błędu I rodzaju (czyli poziomu istotności testu) i błędu II rodzaju dla tego testu.

Zadanie **5. (8 punktów)** jak dla pozostałych specjalności.

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 16.02.2007
Matematyka z informatyką

Zadanie **1. (8 punktów)**
Na odwrocie znajduje się program.
(a) Narysować schemat blokowy działania programu.
(b) Co zostanie wyświetlone na ekranie w wyniku działania programu?

Zadanie **2. (8 punktów)**
Niech będą dane macierze:

$$A=\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad b=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$T=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}, \qquad c=\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Wykazać, że dla każdego $x^0 \in \mathbb{R}^3$ ciąg $x^{k+1}=Tx^k+c$, $k=0,1,2,\ldots$ jest zbieżny do rozwiązania układu równań $Ax=b$.

Zadanie **3. (8 punktów)**
Wielomiany *Czebyszewa* są określone wzorem:

$$T_n(x)=\begin{cases} 1, & n=0 \\ x, & n=1 \\ 2x\,T_{n-1}(x)-T_{n-2}(x), & n>1\,. \end{cases}$$

Wykazać, że dla $n=0,1,2,3,\ldots$ oraz $x\in[-1,1]$ zachodzi

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x).$$

Zadanie **4. (8 punktów)**
Dla losowej próby 25 obserwacji z rozkładu normalnego o średniej μ i odchyleniu standardowym 4, testujemy hipotezę H_0: $\mu=0$ przeciwko hipotezie H_1: $\mu=0.5$. Hipoteza H_0 jest przyjęta, gdy średnia z próby $\overline{x}$ spełnia nierówność $|\overline{x}|<1.5$, w przeciwnym przypadku jest odrzucana. Obliczyć prawdopodobieństwa błędu I rodzaju (czyli poziomu istotności testu) i błędu II rodzaju dla tego testu.

Zadanie **5. (8 punktów)** jak dla pozostałych specjalności.

Program do zadania 1:

```
struct StRec
{
   int n;
   struct StRec *next;
};

struct StRec *fA(int n, struct StRec *Lst)
{
   struct StRec *r;

   r = (struct StRec *)malloc(sizeof(struct StRec));
   r->n    = n;
   r->next = Lst;
   return r;
}
int N=0;
struct StRec *fB(int n, struct StRec *Lst)
{
   printf("%3i\n",++N);
   if( Lst==NULL )
      return NULL;
   if( Lst->n==n )
      return Lst;
   return fB(n, Lst->next);
}
const int d[] = {-1,0,2,1,7,6,3,2,9};

int main()
{
   struct StRec *root=NULL;
   int i;

   for(i=0;i<sizeof(d)/sizeof(int);++i)
      root = fA(d[i],root);
   printf(/A: %s\n", (fB(3,root)==NULL ? /NIE" : "TAK") );
   N = 0;
   printf("B: %s\n", (fB(-2,root)==NULL ? /NIE" : "TAK") );
   puts(/C:");
   do {
         printf("%3i\n",root->n);
      } while((root=root->next)!=NULL);
   return 0;
}
```

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 16.02.2007
Matematyka nauczycielska

Zadanie **1. (8 punktów)**

(a) Wykazać, że suma potęg szóstki o wykładnikach od 1 do 100 dzieli się przez 7.

(b) Dla jakich k suma potęg czternastki o wykładnikach od 1 do k dzieli się przez 13?

Zadanie **2. (8 punktów)**

Niech J^s oznacza jednokładność o środku w punkcie $(1,1,1)$ i skali s. Niech K oznacza kulę wpisaną w sześcian $[0,1]^3$. Znajdź takie s, że K i $J^s(K)$ są zewnętrznie styczne. Podać wzór tego przekształcenia.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Znaleźć promień kuli wpisanej w sześciościan o ścianach będących trójkątami równobocznymi o boku 1.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Dla losowej próby 25 obserwacji z rozkładu normalnego o średniej μ i odchyleniu standardowym 4, testujemy hipotezę H_0: $\mu = 0$ przeciwko hipotezie H_1: $\mu = 0.5$. Hipoteza H_0 jest przyjęta, gdy średnia z próby $\overline{x}$ spełnia nierówność $|\overline{x}| < 1.5$, w przeciwnym przypadku jest odrzucana. Obliczyć prawdopodobieństwa błędu I rodzaju (czyli poziomu istotności testu) i błędu II rodzaju dla tego testu.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Podać ogólne rozwiązanie układu równań różniczkowych

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) \\ y'(t) = x(t) + 2y(t)\,, \end{cases}$$

a następnie znaleźć rozwiązanie tego układu spełniające warunek

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 16.02.2007
Zastosowania

Zadanie **1. (8 punktów)**

Niech $\{B(t); t \geqslant 0\}$ będzie standardowym ruchem Browna. Wyznaczyć:
(a) $\lim\limits_{n\to\infty} P(\sum_{i=1}^{n}(B(i)-B(i-1))^2 > n)$;
(b) $P(B(2007)-B(2006) > 0)$.
Odpowiedzi uzasadnić.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładach $P(X_k = \mathrm{e}^{1/k}) = P(X_k = \mathrm{e}^{2/k}) = 1/2$ dla $k = 1,2,\ldots$ odpowiednio. Zbadać zbieżność

$$\prod_{k=1}^{n} X_k^{k/n}, \text{ gdy } n \to \infty\,.$$

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech X_1, X_2 będzie próbą losową rozmiaru 2 z rozkładu jednostajnego $(2\theta, 3\theta)$, gdzie $\theta > 0$.
(a) Znajdź metodą momentów estymator parametru θ.
(b) Czy jest to estymator nieobciążony ?
(c) Znajdź estymator największej wiarygodności parametru θ.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Niech dany będzie proces Poissona $N(t)$ z intensywnością λ oraz niezależny od $N(t)$ ciąg jednakowo rozłożonych, niezależnych i nieujemnych zmiennych losowych $\{\xi_i\}$, $i = 1,2,\ldots$ o dystrybuancie F. Niech

$$X(t) = t - \sum_{i=1}^{N(t)} \xi_i.$$

Udowodnić, że

$$Ee^{\theta X(t)} = e^{\psi(\theta)t}, \quad \theta > 0$$

dla pewnej funkcji $\psi(\cdot)$. Znaleźć postać funkcji $\psi(\cdot)$.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Podać ogólne rozwiązanie układu równań różniczkowych

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) \\ y'(t) = x(t) + 2y(t)\,, \end{cases}$$

a następnie znaleźć rozwiązanie tego układu spełniające warunek

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$