

Specjalność teoretyczna 2007-09.

1. Niech Γ będzie dodatnio zorientowanym konturem na płaszczyźnie wyznaczonym przez półokrąg $x^2 + y^2 = 2$, $y \geq 0$, zamknięty średnicą. Obliczyć całkę

$$\oint_{\Gamma} \frac{e^{iz} dz}{1 + z^2}.$$

2. Wiadomo, że liniowe przekształcenie płaszczyzny F przekształca prostą $x = 1$ na nią samą. Udowodnić, że

- a) liczba 1 jest wartością własną przekształcenia F ,
- b) wektor $(0,1)$ jest wektorem własnym przekształcenia F .

3. Dane są dwie niezależne zmienne losowe X i Y o jednakowym rozkładzie

$$\mu(dx) = \frac{e^{-x^2} dx}{\sqrt{\pi}}.$$

Znaleźć rozkład zmiennej losowej $Z = X + Y$.

4. Dane jest ciągle i różnowartościowe odwzorowanie f zwartej przestrzeni X na pewną przestrzeń topologiczną Y . Wykazać, że f jest homeomorfizmem.