

**EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 30.06.2008**  
**Biomatematyka**

*Zadanie* **1.**

Rozpatrzmy locus o trzech allelach  $a_1$ ,  $a_2$  i  $a_3$ . Allel  $a_1$  dominuje zarówno allele  $a_2$  jak i allel  $a_3$  natomiast allel  $a_2$  dominuje allel  $a_3$ . Jakiej częstości poszczególnych genotypów i fenotypów możemy oczekiwać w przypadku skrzyżowania osobnika o genotypie  $a_1a_3$  z osobnikiem o genotypie  $a_2a_3$ ?

*Zadanie* **2.**

Proces mutacji nukleotydów w wybranym miejscu nici DNA pod wpływem pewnego czynnika mutagennego opisany jest przez łańcuch Markowa z przestrzenią stanów A, G, C, T i macierzą prawdopodobieństw przejść postaci

$$\begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.5 \\ 0.3 & 0.4 & 0 & 0.3 \\ 0.4 & 0 & 0.4 & 0.2 \\ 0.3 & 0 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

- (a) Policz rozkład stacjonarny łańcucha opisującego proces mutacji.
- (b) Załóżmy, że sekwencja DNA poddawana jest procesowi mutacji przez bardzo długi czas. Jakiej częstości poszczególnych nukleotydów możemy się spodziewać?

*Zadanie* **3.**

Wylosowano 10 par, zawierających związek małżeński i otrzymano dla nich dane o wieku kobiety ( $x$ ) i wieku mężczyzny ( $y$ )

x	23	24	29	27	33	29	19	22	21	23
y	27	28	30	30	35	41	22	25	26	26

Zweryfikuj, na poziomie istotności 0,05 hipotezę, że istnieje dodatnia korelacja wieku małżonków.

*Zadanie* **4.**

Rozwiązać następujące zagadnienie początkowe

$$\begin{aligned} x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) &= 6e^t, \\ x(0) &= 1, \quad x'(0) = 1. \end{aligned}$$

*Zadanie* **5.**

Jak dla pozostałych specjalności.

**EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 30.06.2008**  
**Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach**

*Zadanie* **1.**

Pan  $X$  rozważa ulokowanie pieniędzy bądź na koncie bankowym, bądź w akcjach. Decyzję podejmuje w czasie pokoju, kiedy bank zapewnia oprocentowanie w wysokości 3.6%, a akcje przynoszą dywidendę w wysokości 7.1%. Istnieje jednak realna groźba wybuchu wojny, co spowodowałoby zmniejszenie dywidendy do 0%. Przyjmując, że bank nie bierze pod uwagę zmieniających się okoliczności, zaproponuj panu  $X$  optymalną strategię, kierując się kolejno kryterium:

- a) maksymalnym,
- b) kompromisowym ze współczynnikiem optyimizmu  $p=0.7$ ,
- c) najmniejszego ryzyka (żału).

*Zadanie* **2.**

Ryzyko  $X$  ma rozkład  $P(X=0)=0.1, P(X=2)=0.5, P(X=4)=0.4$ .

- a) Wyznaczyć  $d$  jeśli wiadomo, że  $E I_d(X) = 0.4$ , gdzie  $I_d$  oznacza kontrakt stop-loss.
- b) Wyznaczyć  $Var I_4(2X)$ .

*Zadanie* **3.**

Wylosowano 10 par, zawierających związek małżeński i otrzymano dla nich dane o wieku kobiety ( $x$ ) i wieku mężczyzny ( $y$ )

$x$	23	24	29	27	33	29	19	22	21	23
$y$	27	28	30	30	35	41	22	25	26	26

Zweryfikuj, na poziomie istotności 0,05 hipotezę, że istnieje dodatnia korelacja wieku małżonków.

*Zadanie* **4.**

Rozwiązać następujące zagadnienie początkowe

$$\begin{aligned}x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) &= 6e^t, \\ x(0) &= 1, \quad x'(0) = 1.\end{aligned}$$

*Zadanie* **5.**

Wyznaczyć granicę punktową ciągu funkcyjnego:

$$f_n(x) = 2n^2 x e^{-n^2 x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Czy ciąg ten jest zbieżny jednostajnie? Czy ciąg ten jest zbieżny w metryce całkowitej  $L^1$  na  $\mathbb{R}$ ?

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 30.06.2008  
Matematyka z informatyką

*Zadanie* **1.**

Dany jest następujący program:

```
double a[] = {-1.0, 2.0, -3.0, 4.0};

double F(int n)
{
    return (0<n ? 2.0*F(n-1) + a[n-1] : 0.0);
}

int main()
{
    double r;

    r =F(sizeof a/sizeof a[0]);
    printf("r: %14.2f\n", r);
    return 0;
}
```

Pytania:

1. co zostanie wyświetlone na ekranie w wyniku działania programu,
2. przedstawić w postaci zapisu matematycznego algorytm działania funkcji `double F(int n)`.

*Zadanie* **2.**

Określamy rekurencyjnie ciąg  $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$

$$x_{n+1} = -\frac{1}{2}y_n - \frac{1}{2}$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + \frac{4}{3}$$

dla  $n = 0, 1, \dots$  oraz  $x_0 = 0, y_0 = 0$ .

Polecenia:

1. wykazać, że ciąg  $(x_n, y_n)$  jest zbieżny,
2. wyznaczyć granicę ciągu,
3. jaki układ równań liniowych spełnia granica ciągu.

*Zadanie* **3.**

Wylosowano 10 par, zawierających związek małżeński i otrzymano dla nich dane o wieku kobiety ( $x$ ) i wieku mężczyzny ( $y$ )

x	23	24	29	27	33	29	19	22	21	23
y	27	28	30	30	35	41	22	25	26	26

Zweryfikuj, na poziomie istotności 0,05 hipotezę, że istnieje dodatnia korelacja wieku małżonków.

*Zadanie* **4.**

Rozwiązać następujące zagadnienie początkowe

$$\begin{aligned}x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) &= 6e^t, \\ x(0) &= 1, \quad x'(0) = 1.\end{aligned}$$

*Zadanie* **5.**

Wyznaczyć granicę punktową ciągu funkcyjnego:

$$f_n(x) = 2n^2 x e^{-n^2 x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Czy ciąg ten jest zbieżny jednostajnie? Czy ciąg ten jest zbieżny w metryce całkowitej  $L^1$  na  $\mathbb{R}$ ?

**EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 30.06.2008**  
**Matematyka nauczycielska**

*Zadanie* **1.**

Podać przykład liczby naturalnej mniejszej od 2008, która ma dokładnie 12 dzielników. Odpowiedź uzasadnić.

*Zadanie* **2.**

Napisać równanie płaszczyzny przecinającej dokładnie pięć krawędzi sześcianu o wierzchołkach  $(0,0,0)$ ,  $(0,0,1)$ ,  $(0,1,0)$ ,  $(0,1,1)$ ,  $(1,0,0)$ ,  $(1,0,1)$ ,  $(1,1,0)$ ,  $(1,1,1)$  i nieprzechodzącej przez żaden wierzchołek tego sześcianu.

*Zadanie* **3.**

Wylosowano 10 par, zawierających związek małżeński i otrzymano dla nich dane o wieku kobiety ( $x$ ) i wieku mężczyzny ( $y$ )

x	23	24	29	27	33	29	19	22	21	23
y	27	28	30	30	35	41	22	25	26	26

Zweryfikuj, na poziomie istotności 0,05 hipotezę, że istnieje dodatnia korelacja wieku małżonków.

*Zadanie* **4.**

Rozwiązać następujące zagadnienie początkowe

$$\begin{aligned}x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) &= 6e^t, \\ x(0) &= 1, \quad x'(0) = 1.\end{aligned}$$

*Zadanie* **5.**

Wyznaczyć granicę punktową ciągu funkcyjnego:

$$f_n(x) = 2n^2 x e^{-n^2 x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Czy ciąg ten jest zbieżny jednostajnie? Czy ciąg ten jest zbieżny w metryce całkowitej  $L^1$  na  $\mathbb{R}$ ?

**EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 30.06.2008**  
**Teoretyczna**

*Zadanie* **1.**

Dany jest zbiór zwarty  $K \subset \mathbb{R}^n$ . Wykaż, że każda podprzestrzeń topologiczna przestrzeni  $C(K)$  jest ośrodkowa.

*Zadanie* **2.**

Oblicz pole obrazu trójkąta o wierzchołkach  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(1,1)$  przez zespolone odwzorowanie wykładnicze płaszczyzny.

*Zadanie* **3.**

Na płaszczyźnie dany jest zbiór skończony  $A = \{a_1, \dots, a_N\}$  i funkcja  $f$  holomorficzna na  $\mathbb{C} \setminus A$  spełniająca warunek

$$\lim_{z \rightarrow \infty} |zf(z)| = 0.$$

Udowodnij, że

$$\sum_{k=1}^N \operatorname{Res}_{z=a_k} f(z) = 0.$$

*Zadanie* **4.**

Rozwiązać następujące zagadnienie początkowe

$$\begin{aligned} x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) &= 6e^t, \\ x(0) &= 1, \quad x'(0) = 1. \end{aligned}$$

*Zadanie* **5.**

Wyznaczyć granicę punktową ciągu funkcyjnego:

$$f_n(x) = 2n^2 x e^{-n^2 x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Czy ciąg ten jest zbieżny jednostajnie? Czy ciąg ten jest zbieżny w metryce całkowitej  $L^1$  na  $\mathbb{R}$ ?

**EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 30.06.2008**  
**Zastosowania**

*Zadanie* **1.**

Wektor  $(X, Y)$  ma rozkład jednostajny na kole o środku w  $(0, 0)$  i promieniu 1. Znajdź kowariancję  $X$  i  $Y$ . Czy zmienne  $X$  i  $Y$  są zależne?

*Zadanie* **2.**

Niech  $X_1, X_2, \dots$  będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie  $P(X_i = 0) = P(X_i = 2) = 1/2$  dla  $k = 1, 2, \dots$ . Wyznaczyć

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i)^x}{\sum_{i=1}^n X_i}\right),$$

gdzie  $F(\cdot)$  jest dystrybuantą rozkładu zmiennej losowej  $X_1$  oraz  $x \in (1, 2)$ .

*Zadanie* **3.**

Niech  $X$  będzie zmienną losową z gęstością  $\cos x$  na  $[0, \pi/2]$ , zaś  $a$  i  $b$  stałymi. Czy proces  $X(t) = b \sin(at + X)$  jest stacjonarny? Odpowiedź uzasadnić.

*Zadanie* **4.**

Rozwiązać następujące zagadnienie początkowe

$$\begin{aligned}x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) &= 6e^t, \\x(0) &= 1, \quad x'(0) = 1.\end{aligned}$$

*Zadanie* **5.**

Wyznaczyć granicę punktową ciągu funkcyjnego:

$$f_n(x) = 2n^2 x e^{-n^2 x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Czy ciąg ten jest zbieżny jednostajnie? Czy ciąg ten jest zbieżny w metryce całkowitej  $L^1$  na  $\mathbb{R}$ ?