EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 23.09.2008
Biomatematyka

Zadanie **1.**

W 200-elementowej próbie losowej z diploidalnej populacji wystąpiło 89 osobników genotypu AA, 57 osobników genotypu Aa oraz 54 osobników genotypu aa. Na podstawie tych danych

(a) dokonaj estymacji częstości poszczególnych alleli,

(b) przetestuj hipotezę mówiącą o tym, że populacja spełnia prawo Hardyego-Weinberga.

Zadanie **2.**

Proces mutacji nukleotydów w wybranym miejscu nici DNA pod wpływem pewnego czynnika mutagennego opisany jest przez łańcuch Markowa z przestrzenią stanów A, G, C, T i macierzą prawdopodobieństw przejść postaci

$$\begin{bmatrix} 0.3 & 0 & 0.2 & 0.5 \\ 0.7 & 0.1 & 0 & 0.2 \\ 0.4 & 0 & 0.4 & 0.2 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

(a) Załóżmy, że początkowo w rozpatrywanym miejscu nici DNA znajduje się nukleotyd A. Jakie jest prawdopodobieństwo, że po dwukrotnym poddaniu tej nici procesowi mutacji nadal znajduje się na tym miejscu nukleotyd A?

(b) Załóżmy, że sekwencja DNA poddawana jest działaniu czynnika mutacyjnego bardzo dużą liczbę razy. Który, z nukleotydów ma szansę wystąpić na rozpatrywanym miejscu z największym prawdopodobieństwem?

Zadanie **3.**

W celu sprawdzenia symetrii kostki do gry wykonano 120 rzutów kostką z wynikami

Liczba oczek	1	2	3	4	5	6
Liczba rzutów	11	30	14	10	33	22

Zweryfikuj tę hipotezę na poziomie istotności 0,05.

Zadanie **4.**

Jak dla pozostałych specjalności.

Zadanie **5.**

Jak dla pozostałych specjalności.

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 23.09.2008
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

Zadanie **1.**

Załóżmy, że zachodzi hipoteza HU oraz $l_{20} = 1000$, $l_{21} = 960$, ${}_2p_{20} = 0.9$.
a) Obliczyć ${}_{1.5}p_{20}$;
b)Wyznaczyć JSN dla portfela ubezpieczeniowego dla 20-latka, w którym jeśli ubezpieczony przeżyje 1 rok, to w rocznicę umowy wypłacana jest kwota 10. Jeśli śmierć nastąpi w drugim roku ubezpieczenia, to wypłata w 2 rocznicę umowy wynosi 2. Przyjąć stopę procentową $i = 10\%$.

Zadanie **2.**

W czasie gradobicia na parkingu salonu samochodowego uszkodzeniu ulega N_1 samochodów modelu A oraz N_2 samochodów modelu B. Koszt naprawy pojedynczego samochodu modelu A ma rozkład równomierny na zbiorze $\{1,2\}$ oraz koszt naprawy pojedynczego samochodu modelu B ma rozkład równomierny na zbiorze $\{2,4\}$. Zakładamy niezależność kosztów napraw oraz, że $N_1 = 2N_2$ i $P(N_2 = 1) = P(N_2 = 2) = 0.5$. Wyznaczyć
a) Średni całkowity koszt naprawy z powodu gradobicia;
b) Prawdopodobieństwo tego, że całkowity koszt naprawy będzie nie większy niż 4.

Zadanie **3.**

W celu sprawdzenia symetrii kostki do gry wykonano 120 rzutów kostką z wynikami

Liczba oczek	1	2	3	4	5	6
Liczba rzutów	11	30	14	10	33	22

Zweryfikuj tę hipotezę na poziomie istotności 0,05.

Zadanie **4.**

Dla jakich parametrów $\lambda \in \mathbb{R}$ równanie
$$x''(t) - \lambda x(t) = 0,\ t \in (0,1)$$
posiada niezerowe rozwiązanie $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ spełniające warunki brzegowe
$$x(0) = x(1) = 0.$$

Zadanie **5.**

Obliczyć całkę
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\, dx\,.$$

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 23.09.2008
Matematyka z informatyką

Zadanie **1.**

Dany jest następujący program:

```
int main()
{
   double x0,x1,y0,y1;

   x0 = y0 = 0.0;
   while( 1 )
   {
      x1 = -0.25*y0 - 0.75;
      y1 =  0.5 *x0 + 1.5;
      if( fabs(x1-x0)+fabs(y1-y0)< 1.0e-20 )
         break;
      x0 = x1;
      y0 = y1;
   }
   printf("x: %5.1f\ny: %5.1f\n\n", x1, y1);
   return 0;
}
```

Pytania:

1. uzasadnić, dlaczego program zakończy swoje działanie,
2. co zostanie wyświetlone na ekranie.

Zadanie **2.**

Niech $f(x)=(x-1)^3$. Wykazać, że mimo iż $f'(1)=0$, to ciąg z metody *Newtona*

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n=0,1,2,\dots$$

znajdywania rozwiązania równania $f(x)=0$, dla każdego $x_0\in(1,\infty)$ spełnia:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1.$$

Zadania **3, 4, 5.**

Jak dla specjalności *Matematyka nauczycielska*

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 23.09.2008
Matematyka nauczycielska

Zadanie **1.**

Podać przykład liczby, której ostatnie cztery cyfry to 1234 (w tej kolejności) i która jest podzielna przez 7.

Odpowiedź uzasadnić.

Zadanie **2.**

Udowodnić, że jeśli w pewnym trójkącie dwie środkowe i dwusieczna przecinają się w jednym punkcie, to ten trójkąt jest równoramienny.

Zadanie **3.**

W celu sprawdzenia symetrii kostki do gry wykonano 120 rzutów kostką z wynikami

Liczba oczek	1	2	3	4	5	6
Liczba rzutów	11	30	14	10	33	22

Zweryfikuj tę hipotezę na poziomie istotności 0,05.

Zadanie **4.**

Dla jakich parametrów $\lambda \in \mathbb{R}$ równanie

$$x''(t) - \lambda x(t) = 0, \ t \in (0,1)$$

posiada niezerowe rozwiązanie $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ spełniające warunki brzegowe

$$x(0) = x(1) = 0.$$

Zadanie **5.**

Obliczyć całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\, dx\,.$$

EGZAMIN DYPLOMOWY, część II, 23.09.2008
Zastosowania

Zadanie **1.**
Zmienne losowe X i Y są niezależne i o tym samym rozkładzie, zaś ich suma ma rozkład normalny. Udowodnij, że X i Y mają także rozkład normalny.

Zadanie **2.**
Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie $P(X_i = \mathrm{e}) = P(X_i = \mathrm{e}^2) = 1/2$ dla $k = 1, 2, \ldots$. Zbadać zbieżność

$$\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} X_i}},$$

gdy $n \to \infty$.

Zadanie **3.**
Niech $\{T_k\}$ będzie ciągiem punktów procesu Poissona z intensywnością λ. Udowodnij, że dla ustalonego T

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(T_k \leqslant T) = \lambda T.$$

Zadanie **4.**
Dla jakich parametrów $\lambda \in \mathbb{R}$ równanie

$$x''(t) - \lambda x(t) = 0, \; t \in (0,1)$$

posiada niezerowe rozwiązanie $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ spełniające warunki brzegowe

$$x(0) = x(1) = 0.$$

Zadanie **5.**
Obliczyć całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\, dx\,.$$