

Egzamin licencjacki, zadania otwarte, 17.09.2008

1. Wyznaczyć wszystkie trójki liczb rzeczywistych A, B, C , dla których funkcja

$$f(x) \begin{cases} \frac{e^{4x} + Ax + B}{x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ C & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze oraz obliczyć $f'(0)$ dla każdej z wyznaczonej trójki parametrów (A, B, C) .

2. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x) = 3x + 14y$$

na zbiorze

$$\{(x, y) : 3x^4 + xy + y^4 = 6\}$$

oraz określić, w których punktach te wartości są osiąmane.

3. Rozwiązać następujące zagadnienie początkowe

$$\begin{aligned} x''(t) &= e^t - \sin(t), \\ x(0) &= 1, \quad x'(0) = 2. \end{aligned}$$

4. Dana jest macierz kwadratowa A wymiaru 3×3 . Wiadomo, że wektory $(1, 1, 0)$ i $(0, 1, 1)$ są wektorami własnymi macierzy A . Dowieść, że wówczas albo obydwa wektory $(1, 3, 2)$ i $(2, 5, 3)$ są wektorami własnymi macierzy A , albo żaden z nich.

5. Podać przykład takiej grupy G (przemiennej lub nieprzemiennej) oraz takich jej elementów a, b , że elementy a, b oraz ab mają rząd 2.

Uzasadnić poprawność podanego przykładu.

6. W torebce znajdują się 4 rodzaje żujków: pomarańczowe, cytrynowe, truskawkowe i wiśniowe (każdy smak jest reprezentowany przez co najmniej jednego żujka).

Wiadomo, że

- jeżeli wyjmemy z torebki losowo dwa żujki, to prawdopodobieństwo, że obydwa są cytrynowe jest równe prawdopodobieństwu, że jeden jest cytrynowy, a jeden pomarańczowy;
- jeżeli wyjmemy z torebki losowo dwa żujki, to prawdopodobieństwo, że obydwa są truskawkowe jest równe prawdopodobieństwu, że jeden jest cytrynowy, a jeden truskawkowy.

Wyjmujemy losowo z torebki 3 żujki. Co jest bardziej prawdopodobne: wyciągnięcie dwóch żujków truskawkowych i jednego pomarańczowego, czy wyciągnięcie dwóch żujków cytrynowych i jednego truskawkowego?