EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2009
Biomatematyka

80 ....

Zadanie **1. (8 punktów)**
Załóżmy, że w diploidalnej populacji kojarzącej się w sposób losowy w loci o dwóch allelach A oraz a, 36 procent osobników ma genotyp aa.

(a) Jaka część osobników tej populacji ma genotyp Aa ?

(b) Jaka część osobników tej populacji o genotypie aa nie miała żadnego z rodziców o genotypie aa ?

Zadanie **2. (8 punktów)**
Załóżmy, że w diploidalnej, kojarzącej się w sposób losowy populacji względne dostosowania genotypów AA, Aa, i aa są w stosunku $(1+s)^2 : 1+s : 1$.

(a) Zakładając, że w obecnej populacji allel A występuje z częstością p, oblicz częstość allelu A w następnym pokoleniu.

(b) Oblicz jak zmienia się częstość allelu A w dwóch kolejnych pokoleniach ?

(c) Czy istnieje punkt równowagi, w którym częstości obu alleli są niezerowe?

Zadanie **3. (8 punktów)**
Według badań antropologicznych można przyjąć, że wzrost polskich mężczyzn ma rozkład normalny o odchyleniu standardowym 8 cm. Chcemy testować hipotezę zerową, że wartość oczekiwana wzrostu wynosi $\mu = 170$ cm przeciwko hipotezie, że $\mu > 170$ cm. Test, oparty na średniej $\overline{x}$ z 25 pomiarów odrzuca hipotezę zerową, gdy $\overline{x} > 172$ cm. Oblicz poziom istotności testu. Oblicz moc tego testu, gdyby w rzeczywistości $\mu = 171$ cm.

Tablice rozkładu normalnego

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.500	0.504	0.508	0.512	0.516	0.520	0.524	0.528	0.532	0.536
0.1	0.540	0.544	0.548	0.552	0.556	0.560	0.564	0.567	0.571	0.575
0.2	0.579	0.583	0.587	0.591	0.595	0.599	0.603	0.606	0.610	0.614
0.3	0.618	0.622	0.626	0.629	0.633	0.637	0.641	0.644	0.648	0.652
0.4	0.655	0.659	0.663	0.666	0.670	0.674	0.677	0.681	0.684	0.688
0.5	0.691	0.695	0.698	0.702	0.705	0.709	0.712	0.716	0.719	0.722
0.6	0.726	0.729	0.732	0.736	0.739	0.742	0.745	0.749	0.752	0.755
0.7	0.758	0.761	0.764	0.767	0.770	0.773	0.776	0.779	0.782	0.785
0.8	0.788	0.791	0.794	0.797	0.800	0.802	0.805	0.808	0.811	0.813
0.9	0.816	0.819	0.821	0.824	0.826	0.829	0.831	0.834	0.836	0.839
1.0	0.841	0.844	0.846	0.848	0.851	0.853	0.855	0.858	0.860	0.862
1.1	0.864	0.867	0.869	0.871	0.873	0.875	0.877	0.879	0.881	0.883
1.2	0.885	0.887	0.889	0.891	0.893	0.894	0.896	0.898	0.900	0.901
1.3	0.903	0.905	0.907	0.908	0.910	0.911	0.913	0.915	0.916	0.918
1.4	0.919	0.921	0.922	0.924	0.925	0.926	0.928	0.929	0.931	0.932
1.5	0.933	0.934	0.936	0.937	0.938	0.939	0.941	0.942	0.943	0.944
1.6	0.945	0.946	0.947	0.948	0.949	0.951	0.952	0.953	0.954	0.954
1.7	0.955	0.956	0.957	0.958	0.959	0.960	0.961	0.962	0.962	0.963
1.8	0.964	0.965	0.966	0.966	0.967	0.968	0.969	0.969	0.970	0.971
1.9	0.971	0.972	0.973	0.973	0.974	0.974	0.975	0.976	0.976	0.977
2.0	0.977	0.978	0.978	0.979	0.979	0.980	0.980	0.981	0.981	0.982
2.1	0.982	0.983	0.983	0.983	0.984	0.984	0.985	0.985	0.985	0.986
2.2	0.986	0.986	0.987	0.987	0.987	0.988	0.988	0.988	0.989	0.989
2.3	0.989	0.990	0.990	0.990	0.990	0.991	0.991	0.991	0.991	0.992
2.4	0.992	0.992	0.992	0.992	0.993	0.993	0.993	0.993	0.993	0.994
2.5	0.994	0.994	0.994	0.994	0.994	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995
2.6	0.995	0.995	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996
2.7	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997
2.8	0.997	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998
2.9	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.999	0.999	0.999
3.0	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999

Zadanie **4. (8 punktów)**

Sprawdzić, czy zbiór postaci $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_d, b_d) \in \mathbf{R}^d$ jest wypukły.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Dla ciągu funkcji $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$ zbadać zbieżność punktową, jednostajną i w normie L_1 na odcinku $[0, 1]$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2009
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

81 ....

Zadanie **1. (8 punktów)**

Stosując kolejno kryterium
a) Laplace'a
b) Hurwicza
c) Savage'a,
wyznacz optymalną spośród decyzji a, b, c i d w sytuacji opisanej następującą macierzą wypłat:

$$W = \begin{array}{|c|rrrr|} \hline a & 10 & 7 & -4 & 3 \\ \hline b & 2 & 0 & 8 & 5 \\ \hline c & 7 & 6 & 4 & -1 \\ \hline d & 0 & 3 & 7 & 4 \\ \hline \end{array}.$$

Zadanie **2. (8 punktów)**

Niech dana będzie tablica trwania życia $l_x = 20000 - 200x$ dla $x = 0, 1, ...$ oraz załóżmy, że spełniona jest hipoteza jednorodnej populacji (HJP).

(a) Obliczyć prawdopodobieństwo ${}_{10}q_{30}$ tego, że 30-latek umrze w czasie najbliższych 10 lat;

(a) Wyznaczyć roczną stopę procentową i, jeśli JSN dla ubezpieczenia na dożycie na 2 lata dla 30-latka wynosi 0.6746.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Według badań antropologicznych można przyjąć, że wzrost polskich mężczyzn ma rozkład normalny o odchyleniu standardowym 8 cm. Chcemy testować hipotezę zerową, że wartość oczekiwana wzrostu wynosi $\mu = 170$ cm przeciwko hipotezie, że $\mu > 170$ cm. Test, oparty na średniej $\overline{x}$ z 25 pomiarów odrzuca hipotezę zerową, gdy $\overline{x} > 172$ cm. Oblicz poziom istotności testu. Oblicz moc tego testu, gdyby w rzeczywistości $\mu = 171$ cm.

Tablice rozkładu normalnego

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.500	0.504	0.508	0.512	0.516	0.520	0.524	0.528	0.532	0.536
0.1	0.540	0.544	0.548	0.552	0.556	0.560	0.564	0.567	0.571	0.575
0.2	0.579	0.583	0.587	0.591	0.595	0.599	0.603	0.606	0.610	0.614
0.3	0.618	0.622	0.626	0.629	0.633	0.637	0.641	0.644	0.648	0.652
0.4	0.655	0.659	0.663	0.666	0.670	0.674	0.677	0.681	0.684	0.688
0.5	0.691	0.695	0.698	0.702	0.705	0.709	0.712	0.716	0.719	0.722
0.6	0.726	0.729	0.732	0.736	0.739	0.742	0.745	0.749	0.752	0.755
0.7	0.758	0.761	0.764	0.767	0.770	0.773	0.776	0.779	0.782	0.785
0.8	0.788	0.791	0.794	0.797	0.800	0.802	0.805	0.808	0.811	0.813
0.9	0.816	0.819	0.821	0.824	0.826	0.829	0.831	0.834	0.836	0.839
1.0	0.841	0.844	0.846	0.848	0.851	0.853	0.855	0.858	0.860	0.862
1.1	0.864	0.867	0.869	0.871	0.873	0.875	0.877	0.879	0.881	0.883
1.2	0.885	0.887	0.889	0.891	0.893	0.894	0.896	0.898	0.900	0.901
1.3	0.903	0.905	0.907	0.908	0.910	0.911	0.913	0.915	0.916	0.918
1.4	0.919	0.921	0.922	0.924	0.925	0.926	0.928	0.929	0.931	0.932
1.5	0.933	0.934	0.936	0.937	0.938	0.939	0.941	0.942	0.943	0.944
1.6	0.945	0.946	0.947	0.948	0.949	0.951	0.952	0.953	0.954	0.954
1.7	0.955	0.956	0.957	0.958	0.959	0.960	0.961	0.962	0.962	0.963
1.8	0.964	0.965	0.966	0.966	0.967	0.968	0.969	0.969	0.970	0.971
1.9	0.971	0.972	0.973	0.973	0.974	0.974	0.975	0.976	0.976	0.977
2.0	0.977	0.978	0.978	0.979	0.979	0.980	0.980	0.981	0.981	0.982
2.1	0.982	0.983	0.983	0.983	0.984	0.984	0.985	0.985	0.985	0.986
2.2	0.986	0.986	0.987	0.987	0.987	0.988	0.988	0.988	0.989	0.989
2.3	0.989	0.990	0.990	0.990	0.990	0.991	0.991	0.991	0.991	0.992
2.4	0.992	0.992	0.992	0.992	0.993	0.993	0.993	0.993	0.993	0.994
2.5	0.994	0.994	0.994	0.994	0.994	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995
2.6	0.995	0.995	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996
2.7	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997
2.8	0.997	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998
2.9	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.999	0.999	0.999
3.0	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999

Zadanie **4. (8 punktów)**

Sprawdzić, czy zbiór postaci $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_d, b_d) \in \mathbf{R}^d$ jest wypukły.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Dla ciągu funkcji $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$ zbadać zbieżność punktową, jednostajną i w normie L_1 na odcinku $[0, 1]$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2009
Matematyka z informatyką

82 **..................** ....

Zadanie **1. (8 punktów)**
Wykazać, że funkcja

$$f_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x), \quad x \in [-1, 1], \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

jest wielomianem stopnia n i współczynnikiem przy najwyższej potędze jest $a_n = 2^{n-1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Zadanie **2. (8 punktów)**
Dany jest program:

```
struct TTree {
   int w;
   struct TTree *L,*R;
};

void Proc( struct TTree *wT ) {
   if( wT==NULL )
      return;
   if( wT->L!=NULL )
      Proc( wT->L );
   printf("%4i ", wT->w);
   Proc( wT->R );
}

int main() {
   struct TTree T[3];
   int i,n;

   n = sizeof(T) \ sizeof(T[0]);
   for(i=0; i<n; ++i)
   {
      T[i].w = i+1;
      T[i].L = T[i].R = NULL;
```

```
    }
    T[1].L = &T[0];
    T[1].R = &T[2];
    Proc( &T[1] );
    puts("");
    return 0;
}
```

Pytania:

1. Co zostanie wyświetlone na ekranie ?
2. Uzasadnić otrzymany wynik.
3. Narysować schemat blokowy programu.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Według badań antropologicznych można przyjąć, że wzrost polskich mężczyzn ma rozkład normalny o odchyleniu standardowym 8 cm. Chcemy testować hipotezę zerową, że wartość oczekiwana wzrostu wynosi $\mu = 170$ cm przeciwko hipotezie, że $\mu > 170$ cm. Test, oparty na średniej $\overline{x}$ z 25 pomiarów odrzuca hipotezę zerową, gdy $\overline{x} > 172$ cm. Oblicz poziom istotności testu. Oblicz moc tego testu, gdyby w rzeczywistości $\mu = 171$ cm.

Tablice rozkładu normalnego

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.500	0.504	0.508	0.512	0.516	0.520	0.524	0.528	0.532	0.536
0.1	0.540	0.544	0.548	0.552	0.556	0.560	0.564	0.567	0.571	0.575
0.2	0.579	0.583	0.587	0.591	0.595	0.599	0.603	0.606	0.610	0.614
0.3	0.618	0.622	0.626	0.629	0.633	0.637	0.641	0.644	0.648	0.652
0.4	0.655	0.659	0.663	0.666	0.670	0.674	0.677	0.681	0.684	0.688
0.5	0.691	0.695	0.698	0.702	0.705	0.709	0.712	0.716	0.719	0.722
0.6	0.726	0.729	0.732	0.736	0.739	0.742	0.745	0.749	0.752	0.755
0.7	0.758	0.761	0.764	0.767	0.770	0.773	0.776	0.779	0.782	0.785
0.8	0.788	0.791	0.794	0.797	0.800	0.802	0.805	0.808	0.811	0.813
0.9	0.816	0.819	0.821	0.824	0.826	0.829	0.831	0.834	0.836	0.839
1.0	0.841	0.844	0.846	0.848	0.851	0.853	0.855	0.858	0.860	0.862
1.1	0.864	0.867	0.869	0.871	0.873	0.875	0.877	0.879	0.881	0.883
1.2	0.885	0.887	0.889	0.891	0.893	0.894	0.896	0.898	0.900	0.901
1.3	0.903	0.905	0.907	0.908	0.910	0.911	0.913	0.915	0.916	0.918
1.4	0.919	0.921	0.922	0.924	0.925	0.926	0.928	0.929	0.931	0.932
1.5	0.933	0.934	0.936	0.937	0.938	0.939	0.941	0.942	0.943	0.944
1.6	0.945	0.946	0.947	0.948	0.949	0.951	0.952	0.953	0.954	0.954
1.7	0.955	0.956	0.957	0.958	0.959	0.960	0.961	0.962	0.962	0.963
1.8	0.964	0.965	0.966	0.966	0.967	0.968	0.969	0.969	0.970	0.971
1.9	0.971	0.972	0.973	0.973	0.974	0.974	0.975	0.976	0.976	0.977
2.0	0.977	0.978	0.978	0.979	0.979	0.980	0.980	0.981	0.981	0.982
2.1	0.982	0.983	0.983	0.983	0.984	0.984	0.985	0.985	0.985	0.986
2.2	0.986	0.986	0.987	0.987	0.987	0.988	0.988	0.988	0.989	0.989
2.3	0.989	0.990	0.990	0.990	0.990	0.991	0.991	0.991	0.991	0.992
2.4	0.992	0.992	0.992	0.992	0.993	0.993	0.993	0.993	0.993	0.994
2.5	0.994	0.994	0.994	0.994	0.994	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995
2.6	0.995	0.995	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996
2.7	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997
2.8	0.997	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998
2.9	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.999	0.999	0.999
3.0	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999

Zadanie **4. (8 punktów)**

Sprawdzić, czy zbiór postaci $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_d, b_d) \in \mathbf{R}^d$ jest wypukły.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Dla ciągu funkcji $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$ zbadać zbieżność punktową, jednostajną i w normie L_1 na odcinku $[0, 1]$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2009
Matematyka nauczycielska

83 **..................** ....

Zadanie **1. (8 punktów)**
Pokazać, że suma przekątnych pięciokąta wypukłego jest większa od jego obwodu ale mniejsza od podwojonego obwodu tego pięciokąta.

Zadanie **2. (8 punktów)**
Wykazać, że jeśli n jest liczbą naturalną a liczba $2^n + 1$ jest pierwsza to n jest potęgą dwójki.

Zadanie **3. (8 punktów)**
Według badań antropologicznych można przyjąć, że wzrost polskich mężczyzn ma rozkład normalny o odchyleniu standardowym 8 cm. Chcemy testować hipotezę zerową, że wartość oczekiwana wzrostu wynosi $\mu = 170$ cm przeciwko hipotezie, że $\mu > 170$ cm. Test, oparty na średniej $\overline{x}$ z 25 pomiarów odrzuca hipotezę zerową, gdy $\overline{x} > 172$ cm. Oblicz poziom istotności testu. Oblicz moc tego testu, gdyby w rzeczywistości $\mu = 171$ cm.

Tablice rozkładu normalnego

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.500	0.504	0.508	0.512	0.516	0.520	0.524	0.528	0.532	0.536
0.1	0.540	0.544	0.548	0.552	0.556	0.560	0.564	0.567	0.571	0.575
0.2	0.579	0.583	0.587	0.591	0.595	0.599	0.603	0.606	0.610	0.614
0.3	0.618	0.622	0.626	0.629	0.633	0.637	0.641	0.644	0.648	0.652
0.4	0.655	0.659	0.663	0.666	0.670	0.674	0.677	0.681	0.684	0.688
0.5	0.691	0.695	0.698	0.702	0.705	0.709	0.712	0.716	0.719	0.722
0.6	0.726	0.729	0.732	0.736	0.739	0.742	0.745	0.749	0.752	0.755
0.7	0.758	0.761	0.764	0.767	0.770	0.773	0.776	0.779	0.782	0.785
0.8	0.788	0.791	0.794	0.797	0.800	0.802	0.805	0.808	0.811	0.813
0.9	0.816	0.819	0.821	0.824	0.826	0.829	0.831	0.834	0.836	0.839
1.0	0.841	0.844	0.846	0.848	0.851	0.853	0.855	0.858	0.860	0.862
1.1	0.864	0.867	0.869	0.871	0.873	0.875	0.877	0.879	0.881	0.883
1.2	0.885	0.887	0.889	0.891	0.893	0.894	0.896	0.898	0.900	0.901
1.3	0.903	0.905	0.907	0.908	0.910	0.911	0.913	0.915	0.916	0.918
1.4	0.919	0.921	0.922	0.924	0.925	0.926	0.928	0.929	0.931	0.932
1.5	0.933	0.934	0.936	0.937	0.938	0.939	0.941	0.942	0.943	0.944
1.6	0.945	0.946	0.947	0.948	0.949	0.951	0.952	0.953	0.954	0.954
1.7	0.955	0.956	0.957	0.958	0.959	0.960	0.961	0.962	0.962	0.963
1.8	0.964	0.965	0.966	0.966	0.967	0.968	0.969	0.969	0.970	0.971
1.9	0.971	0.972	0.973	0.973	0.974	0.974	0.975	0.976	0.976	0.977
2.0	0.977	0.978	0.978	0.979	0.979	0.980	0.980	0.981	0.981	0.982
2.1	0.982	0.983	0.983	0.983	0.984	0.984	0.985	0.985	0.985	0.986
2.2	0.986	0.986	0.987	0.987	0.987	0.988	0.988	0.988	0.989	0.989
2.3	0.989	0.990	0.990	0.990	0.990	0.991	0.991	0.991	0.991	0.992
2.4	0.992	0.992	0.992	0.992	0.993	0.993	0.993	0.993	0.993	0.994
2.5	0.994	0.994	0.994	0.994	0.994	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995
2.6	0.995	0.995	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996
2.7	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997
2.8	0.997	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998
2.9	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.999	0.999	0.999
3.0	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999

Zadanie **4. (8 punktów)**

Sprawdzić, czy zbiór postaci $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_d, b_d) \in \mathbf{R}^d$ jest wypukły.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Dla ciągu funkcji $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$ zbadać zbieżność punktową, jednostajną i w normie L_1 na odcinku $[0, 1]$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 17.02.2009
Zastosowania

84 ....

Zadanie **1. (8 punktów)**

Niech $X_1, X_2, ...$ oraz $Y_1, Y_2, ...$ będą niezależnymi ciągami jednakowo rozłożonych niezależnych zmiennych losowych o ciągłych dystrybuantach F, G odpowiednio. Zbadać zbieżność

$$\frac{\sum_{i=1}^{n+2009} F(X_i) - \sum_{i=2009}^{n} G(Y_i)}{n^{\frac{1}{2}}},$$

gdy $n \to \infty$.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Niech U będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[0,1]$. Znajdź $EX(t)$, $R(t,s) = \mathrm{Cov}(X(t), X(s))$ oraz rozkłady skończenie wymiarowe procesu: $X(t) = \mathbf{I}_{\{t \leqslant U\}}$.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech F_θ będzie dystrybuantą zmiennej losowej $\ln(Y-1)$, gdzie Y ma rozkład Pareto z parametrem $\theta > 0$, tj. $P(Y \leqslant y) = 1 - \frac{1}{y^\theta}$, $y \geqslant 1$. Niech $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ będzie próbą z rozkładu F_θ, $\theta > 0$. Wyznacz statystykę dostateczną dla parametru θ. Czy jest to minimalna statystyka dostateczna? Czy jest ona zupełna? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Sprawdzić, czy zbiór postaci $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_d, b_d) \in \mathbf{R}^d$ jest wypukły.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Dla ciągu funkcji $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$ zbadać zbieżność punktową, jednostajną i w normie L_1 na odcinku $[0,1]$.