

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Biomatematyka

80

Zadanie **1.** (8 punktów)

Rozpatrzmy prawo Hardy'ego–Weinberga dla loci związanej z chromosomem X o dwóch allelach A_1 i A_2 . Załóżmy, że początkowa częstość allelu A_2 u kobiet jest równa p_k natomiast u mężczyzn p_m . (a) Podaj częstość allelu A_2 wśród kobiet oraz wśród mężczyzn w dwóch kolejnych pokoleniach.

(b) Podaj jak zmienia się różnica pomiędzy częstością allelu A_2 u kobiet i częstością allelu A_2 u mężczyzn w kolejnych generacjach.

(c) Podaj jak zmienia się częstość allelu A_2 w całej populacji w kolejnych generacjach.

UWAGA. Przypomnijmy, że każda kobieta posiada dwa chromosomy X natomiast każdy mężczyzna posiada jeden chromosom X odziedziczony po ojcu.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Biomatematyka

80

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Biomatematyka

80

Zadanie **2.** (8 punktów)

Założmy, że w diploidalnej, kojarzącej się w sposób losowy populacji dostosowania genotypów AA , Aa i aa są w stosunku $1 : 1 : 1 - s$ występuje jednokierunkowa mutacja $A \rightarrow a$. Wiedząc, że częstość tej mutacji wynosi μ oblicz :

- (a) Zakładając, że w obecnej populacji allel A występuje z częstością p , oblicz częstość allelu A w następnym pokoleniu.
- (c) Czy istnieje punkt równowagi, w którym częstości obu alleli są niezerowe ?
- (b) Oblicz częstość z jaką występuje allel a w punkcie równowagi ?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Biomatematyka

80

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Biomatematyka

80

Zadanie **3.** (8 punktów)

Wybrano losowo 100 osób. Okazało się, że wśród nich jest 40 kobiet i 60 mężczyzn. 30 kobiet i 40 mężczyzn zadeklarowało, że lubi tańczyć. Znajdź oszacowanie największej wiarygodności prawdopodobieństwa, że losowo wybrana osoba lubi tańczyć. Czy oszacowanie to się zmieni, gdyby stosunek do tańca był niezależny od płci ?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Biomatematyka

80

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Biomatematyka

80

Zadanie **4.** (8 punktów)

Niech zbiory borelowskie A_n ($n = 1, 2, \dots$) spełniają $\lambda(A_n \cap A_k) = 0$ dla wszystkich $n \neq k$ (λ jest miarą Lebesgue'a). Wykazać, że $\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Biomatematyka

80

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Biomatematyka

80

Zadanie **5.** (8 punktów)

Pokazać, że dla normy w C^2 zadanej wzorem $\|(x, y)\| = |x| + |y|$ nie istnieje iloczyn skalarny taki, że $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Biomatematyka

80

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

81

Zadanie **1.** (8 punktów)

Dana jest następująca macierz:

$$A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

- a) Zakładając naprzód, że jest to macierz wypłat w grze z Naturą przyjmującą swoje stany z prawdopodobieństwami 0.25, 0.50, 0.25, wyznacz decyzje optymalne stosując kolejno każde z wprowadzonych kryteriów.
- b) Przyjmując następnie, że jest to macierz wypłat w grze dwuosobowej o sumie zero i traktując podane prawdopodobieństwa jako strategię mieszaną I gracza, rozstrzygnij, czy jest to jego strategia optymalna. Jeśli tak, podaj wartość tej gry i optymalną strategię II gracza.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

81

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

81

Zadanie **2.** (8 punktów)

Niech dana będzie tablica trwania życia $l_x = 100000 - 10x^2$ oraz założmy, że spełniona jest hipoteza jednorodnej populacji (HJP).

a) Obliczyć średnią ilość osób, które umrą w wieku 25 lat oraz ${}_{2.5}p_{24}$, gdy spełniona jest hipoteza HU.

b) Wyznaczyć JSN dla pakietu rentowo-ubezpieczeniowego dla 20-latka, w którym wypłata w wysokości 100 będzie dokonana w 2-gą rocznicę zawarcia umowy, jeśli ubezpieczony wówczas żył oraz wypłata w wysokości 200 będzie dokonana w 3-cią rocznicę zawarcia umowy, gdy ubezpieczony umarł do tej chwili. Przyjąć stopę procentową $i = 0\%$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

81

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

81

Zadanie **3.** (8 punktów)

Wybrano losowo 100 osób. Okazało się, że wśród nich jest 40 kobiet i 60 mężczyzn. 30 kobiet i 40 mężczyzn zadeklarowało, że lubi tańczyć. Znajdź oszacowanie największej wiarygodności prawdopodobieństwa, że losowo wybrana osoba lubi tańczyć. Czy oszacowanie to się zmieni, gdyby stosunek do tańca był niezależny od płci ?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

81

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

81

Zadanie **4.** (8 punktów)

Niech zbiory borelowskie A_n ($n = 1, 2, \dots$) spełniają $\lambda(A_n \cap A_k) = 0$ dla wszystkich $n \neq k$ (λ jest miarą Lebesgue'a). Wykazać, że $\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

81

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

81

Zadanie **5.** (8 punktów)

Pokazać, że dla normy w C^2 zadanej wzorem $\|(x, y)\| = |x| + |y|$ nie istnieje iloczyn skalarny taki, że $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

81

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Matematyka z informatyką

82

Zadanie **1**. (8 punktów)

Dla $v \in R^n$, $v^T v = 1$ niech

$$H = I - 2vv^T.$$

Wykazać, że zachodzi wtedy:

1. $H = H^T$,
2. $H^2 = I$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Matematyka z informatyką

82

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Matematyka z informatyką

82

Zadanie **2.** (8 punktów)

Dany jest program:

```
#include <stdio.h>

int main()
{
    int i,j,n,S;

    n = 5;
    S = 0;
    for(i=0; i<n; ++i)
    {
        j = i;
        do {
            ++S;
        } while( 0<==--j);
    }
    printf("S: %i\n",S);
    return 0;
}
```

Pytania:

1. Co zostanie wyświetlone na ekranie ?
2. Wyprowadzić wzór matematyczny uzasadniający otrzymany wynik.
3. Narysować schemat blokowy programu.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Matematyka z informatyką

82

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Matematyka z informatyką

82

Zadanie **3.** (8 punktów)

Wybrano losowo 100 osób. Okazało się, że wśród nich jest 40 kobiet i 60 mężczyzn. 30 kobiet i 40 mężczyzn zadeklarowało, że lubi tańczyć. Znajdź oszacowanie największej wiarygodności prawdopodobieństwa, że losowo wybrana osoba lubi tańczyć. Czy oszacowanie to się zmieni, gdyby stosunek do tańca był niezależny od płci ?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Matematyka z informatyką

82

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Matematyka z informatyką

82

Zadanie **4.** (8 punktów)

Niech zbiory borelowskie A_n ($n = 1, 2, \dots$) spełniają $\lambda(A_n \cap A_k) = 0$ dla wszystkich $n \neq k$ (λ jest miarą Lebesgue'a). Wykazać, że $\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Matematyka z informatyką

82

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Matematyka z informatyką

82

Zadanie **5.** (8 punktów)

Pokazać, że dla normy w C^2 zadanej wzorem $\|(x, y)\| = |x| + |y|$ nie istnieje iloczyn skalarny taki, że $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Matematyka z informatyką

82

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Matematyka nauczycielska

83

Zadanie **1.** (8 punktów)

Obliczyć sumę:

$$2005^0 + 2025^1 + 2045^2 + \dots + 20205^{10}$$

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Matematyka nauczycielska

83

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Matematyka nauczycielska

83

Zadanie **2.** (8 punktów)

Udowodnić, że suma długości środkowych w trójkącie jest większa od połowy jego obwodu.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Matematyka nauczycielska

83

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Matematyka nauczycielska

83

Zadanie **3.** (8 punktów)

Wybrano losowo 100 osób. Okazało się, że wśród nich jest 40 kobiet i 60 mężczyzn. 30 kobiet i 40 mężczyzn zadeklarowało, że lubi tańczyć. Znajdź oszacowanie największej wiarygodności prawdopodobieństwa, że losowo wybrana osoba lubi tańczyć. Czy oszacowanie to się zmieni, gdyby stosunek do tańca był niezależny od płci ?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Matematyka nauczycielska

83

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Matematyka nauczycielska

83

Zadanie **4.** (8 punktów)

Niech zbiory borelowskie A_n ($n = 1, 2, \dots$) spełniają $\lambda(A_n \cap A_k) = 0$ dla wszystkich $n \neq k$ (λ jest miarą Lebesgue'a). Wykazać, że $\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Matematyka nauczycielska

83

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Matematyka nauczycielska

83

Zadanie **5.** (8 punktów)

Pokazać, że dla normy w C^2 zadanej wzorem $\|(x, y)\| = |x| + |y|$ nie istnieje iloczyn skalarny taki, że $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Matematyka nauczycielska

83

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Zastosowania

84

Zadanie **1.** (8 punktów)

Niech X_{2i+1} , $i = 0, 1, \dots$ będzie ciągiem jednakowo rozłożonych niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym $U[0, 2]$ oraz $X_{2i+2} = 2X_{2i+1}$, $i = 0, 1, \dots$. Zbadać zbieżność

- a) $\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{\sqrt{2009n}}$;
- b) $\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n}$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Zastosowania

84

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Zastosowania

84

Zadanie **2.** (8 punktów)

Znajdź wykładnik Laplace'a $\psi(\theta) = \frac{1}{t} \log E[e^{\theta X_t}]$ ($\theta \geq 0$) procesu ryzyka:

$$X_t = pt - \sum_{i=1}^{N_t} U_i,$$

gdzie N_t jest procesem Poissona z intensywnością $\lambda > 0$ oraz $\{U_i\}$ jest niezależnym od N_t ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie z dystrybuantą F_U .

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Zastosowania

84

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Zastosowania

84

Zadanie **3.** (8 punktów)

Niech X będzie obserwacją z rozkładu o dystrybuancie

$$F_{\theta}(x) = (1 + \exp\{-x\})^{-\theta}, \quad x \in R, \theta > 0.$$

Niech $\theta_0 > 0$. Skonstruuj test jednostajnie najmocniejszy na poziomie istotności α dla testowania hipotezy $H_0: \theta \leq \theta_0$ przy alternatywie $H_1: \theta > \theta_0$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Zastosowania

84

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Zastosowania

84

Zadanie **4.** (8 punktów)

Niech zbiory borelowskie A_n ($n = 1, 2, \dots$) spełniają $\lambda(A_n \cap A_k) = 0$ dla wszystkich $n \neq k$ (λ jest miarą Lebesgue'a). Wykazać, że $\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Zastosowania

84

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Zastosowania

84

Zadanie **5.** (8 punktów)

Pokazać, że dla normy w C^2 zadanej wzorem $\|(x, y)\| = |x| + |y|$ nie istnieje iloczyn skalarny taki, że $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Zastosowania

84

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Matematyka teoretyczna

85

Zadanie **1.** (8 punktów)

Niech $f \in C_\infty^c$ będzie określona na całej prostej i taka że $f^{(n)}(0) = 0$, $f^{(n)}(x) \geq 0$ dla każdego $n \geq 0$ i $x \in R$. Udowodnić, że f jest tożsamościowo równa zero.

Wsk. W tym celu wypisać wzór Taylora z resztą całkową $R_n(x)$, oraz udowodnić najpierw że jeśli $R_n(x)$, jest w jakimś punkcie $x > 0$ ciągiem ograniczonym z góry i występująca we wzorze na $R_n(x)$ pochodna ma stały znak, to dla każdego dostatecznie małego $0 < y$ ciąg $R_n(y)$ jest zbieżny do zera.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Matematyka teoretyczna

85

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Matematyka teoretyczna

85

Zadanie **2.** (8 punktów)

Niech \mathcal{C} będzie trójkowym zbiorem Cantora. Wiadomo, że istnieje funkcja ciągła $\mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$ na. Czy taka funkcja może być Lipschitzowska, tzn. spełniać warunek $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$ dla dowolnych $x, y \in \mathcal{C}$?

Wsk. Obraz Lipschitzowski zbioru miary zero jest miary zero.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Matematyka teoretyczna

85

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Matematyka teoretyczna

85

Zadanie **3.** (8 punktów)

Udowodnić, że liczba $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ jest niewymierna.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Matematyka teoretyczna

85

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Matematyka teoretyczna

85

Zadanie **4.** (8 punktów)

Niech zbiory borelowskie A_n ($n = 1, 2, \dots$) spełniają $\lambda(A_n \cap A_k) = 0$ dla wszystkich $n \neq k$ (λ jest miarą Lebesgue'a). Wykazać, że $\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Matematyka teoretyczna

85

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Matematyka teoretyczna

85

Zadanie **5.** (8 punktów)

Pokazać, że dla normy w C^2 zadanej wzorem $\|(x, y)\| = |x| + |y|$ nie istnieje iloczyn skalarny taki, że $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 25.06.2009
Matematyka teoretyczna

85