

**1.** Czy jest prawdą, że

- a)  $\forall x \in \mathbf{R} \exists y \in \mathbf{R} (x > y \Rightarrow x > y^2)$  ;
- b)  $\forall y \in \mathbf{R} \exists x \in \mathbf{R} (x > y \Rightarrow x > y^2)$  ;
- c)  $\exists x \in \mathbf{R} \forall y \in \mathbf{R} (x > y \Rightarrow x > y^2)$  ;
- d)  $\exists y \in \mathbf{R} \forall x \in \mathbf{R} (x > y \Rightarrow x > y^2)$  ?

**2.** Czy jest prawdziwa nierówność

- a)  $\ln 100000 < 15$  ;
- b)  $\ln 10000 > 8$  ;
- c)  $\ln 1000 < 9$  ;
- d)  $\ln 100 > 4$  ?

**3.** O ciągach dodatnich liczb rzeczywistych  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  wiadomo, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ , zaś  $(y_n)$  jest ograniczony. Czy wynika stąd, że

- a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$  ;
- b)  $x_n > y_n$  dla dostatecznie dużych  $n$  ;
- c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n - x_n = -\infty$  ;
- d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = +\infty$  ?

**4.** Czy suma szeregu jest dodatnia?

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{n}\right)^3$  ;

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{10^n}$  ;

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  ;

d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2}{3}\right)^n$  .

**5.** Czy jest prawdą, że

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 1$  ;

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$  ;

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x} = 2$  ;

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x^2} = -1$  ?

**6.** Niech  $f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ . Czy pochodna funkcji  $f$  zeruje się w

- a)  $x = 4$  ;
- b)  $x = 3$  ;
- c)  $x = 1$  ;
- d)  $x = 2$  ?

**7.** Niech  $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1 + \frac{t}{x}} dt$ . Czy jest prawdą, że

- a)  $f(3) > 3$  ;
- b)  $f(4) < 2$  ;
- c)  $f(6) > 3$  ;
- d)  $f(5) < 5$  ?

**8.** Funkcja  $f$  zadana jest wzorem  $f(x, y) = x^2 + axy + 2y^2$ . Czy minimum funkcji  $f$  na zbiorze  $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$  jest osiągane na brzegu tego zbioru, jeśli

- a)  $a = 3$  ;
- b)  $a = 2$  ;
- c)  $a = 1$  ;
- d)  $a = 0$  ?

**9.** Część rzeczywista liczby zespolonej  $z$  jest równa 2. Czy wynika stąd, że

- a)  $\operatorname{Re} z^2 \geq -4$  ;
- b)  $|z^2| \geq 4$  ;
- c)  $\operatorname{Re} z^2 \leq 4$  ;
- d)  $z^2$  nie jest liczbą rzeczywistą ujemną ?

**10.** O liczbie zespolonej  $z$  wiadomo, że  $z^{2009} = 1$ . Czy jest możliwe, że

- a)  $|z + 1| \geq 2$  ;
- b)  $\operatorname{Im} z < -\frac{1}{2}$  ;
- c)  $|z - i| < 1$  ;
- d)  $|z - 2| \geq 3$  ?

**11.** Kolumny pewnej rzeczywistej macierzy  $A$  rozmiaru  $3 \times 3$  są wektorami długości 1. Czy wynika stąd, że

- a)  $\operatorname{tr} A = 3$  ;
- b)  $\det A < 2$  ;
- c)  $\operatorname{tr} A > -3$  ;
- d)  $\det A = 1$  ?

**12.** Czy istnieje baza  $\mathbf{R}^2$  złożona z dwóch prostopadłych wektorów własnych macierzy

a)  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  ;

b)  $\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$  ;

c)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ;

d)  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  ?

**13.** Czy podany wektor jest wektorem własnym macierzy

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} ?$$

a)  $(1, 2, 1, 2)$  ;

b)  $(0, 1, 1, 0)$  ;

c)  $(2, 2, 1, 1)$  ;

d)  $(1, 0, 0, 1)$  .

**14.** Czy wektory  $v_1, v_2, v_3$  muszą być liniowo zależne, jeśli wiadomo że

a) są parami prostopadłe ;

b) ich suma jest wektorem zerowym ;

c)  $v_2 = 0$  ;

d)  $v_2 = v_3$  ?

**15.** Rozważmy grupę  $\mathbf{Z}^2$  wektorów o obu współrzędnych całkowitych (z dodawaniem wektorów jako działaniem). Czy jest jej podgrupą zbiór wektorów, których

- a) pierwsza współrzędna dzieli się przez 7 ;
- b) co najwyżej jedna współrzędna dzieli się przez 7 ;
- c) obie współrzędne dzielą się przez 7 ;
- d) co najmniej jedna współrzędna dzieli się przez 7 ?

**16.** Niech  $r(n)$  oznacza liczbę elementów rzędu  $n$  w grupie permutacji  $S_4$ . Czy

- a)  $r(2) > r(4)$  ;
- b)  $r(4) > r(3)$  ;
- c)  $r(1) + r(3) = r(2)$  ;
- d)  $r(5) = r(6)$  ?

**17.** Czy podana liczba jest elementem odwracalnym w pierścieniu liczb postaci  $a + b\sqrt{3}$ ,  $a, b \in \mathbf{Z}$ ?

- a)  $1 + \sqrt{3}$  ;
- b)  $7 + 4\sqrt{3}$  ;
- c)  $\sqrt{3}$  ;
- d)  $2 - \sqrt{3}$  .

**18.** Niech  $p(k)$  oznacza prawdopodobieństwo, że w trzech kolejnych rzutach kostką za każdym razem wypadło co najmniej  $k$  oczek. Czy jest prawdą, że

- a)  $p(5) > 0,04$  ;
- b)  $p(4) = \frac{1}{2}$  ;
- c)  $p(2) > \frac{1}{2}$  ;
- d)  $p(3) < \frac{1}{3}$  ?

**19.** Bolek wybiera losowo wierzchołek sześcianu (każdy z tym samym prawdopodobieństwem); niezależnie od niego to samo robi Lolek (może się zdarzyć, że wybiorą ten sam wierzchołek).

- a) Czy prawdopodobieństwo, że odległość wybranych wierzchołków wynosi  $\sqrt{3}$  jest dodatnie ;
- b) Czy prawdopodobieństwo, że odległość wybranych wierzchołków wynosi  $\sqrt{2}$  jest równe  $3/8$  ;
- c) Czy prawdopodobieństwo, że wybrane wierzchołki leżą na wspólnej krawędzi jest mniejsze niż  $1/2$  ;
- d) Czy prawdopodobieństwo, że wybrane wierzchołki leżą na wspólnej ścianie jest większe niż  $3/4$  ?

**20.** W pewnej sakiewce co  $n$ -ta moneta jest fałszywa: ma z obu stron orła. Z sakiewki wylosowano 1 monetę i rzucono nią  $k$  razy; wypadły same orły. Niech  $p(n, k)$  oznacza prawdopodobieństwo (warunkowe), że wylosowana moneta jest fałszywa. Czy

- a)  $p(2, 1) > 1/2$  ;
- b)  $p(9, 3) = 1/2$  ;
- c)  $p(6, 2) = 1/2$  ;
- d)  $p(3, 2) = p(2, 1)$  ?