

1. Oblicz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}.$$

2. Oblicz objętość zbioru

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 1 \geq z \geq x^2 + y^2\}$$

3. Znajdź rozwiązanie układu równań różniczkowych

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = x(t) \end{cases}$$

z warunkiem początkowym

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

4. Czy istnieją trzy dwuwymiarowe liniowe podprzestrzenie \mathbf{R}^4 , takie że przekrój każdych dwóch z nich jest podprzestrzenią zerową? Podaj przykład takich trzech podprzestrzeni (ze sprawdzeniem żądanych własności) albo udowodnij, że takie podprzestrzenie nie istnieją.

5. Elementy a, b pewnej grupy spełniają równość $aba^{-1} = b^2$, przy czym b nie jest elementem neutralnym. Udowodnij, że rząd elementu b nie jest liczbą parzystą.

6. Zamierzasz spotkać się ze znajomym na lotnisku po jego przylocie. Z doświadczenia wiesz, że samoloty spóźniają się w 70% przylotów, gdy pada deszcz oraz w 20% przylotów, gdy nie pada. Prognoza pogody podaje na dzień przylotu znajomego 40% szans na deszcz. Jakie jest prawdopodobieństwo, że samolot ze znajomym przyleci z opóźnieniem?