

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Biomatematyka

91 .....

*Zadanie* **1**. (8 punktów)

Rozpatrzmy diploidalną populację, dla której zachodzi prawo Hardy'ego-Weinberga dla loci o trzech allelach  $A_1$ ,  $A_2$  i  $A_3$ , które występują w tej populacji z częstościami odpowiednio  $p_1$ ,  $p_2$  i  $p_3$ .

- (a) Jaka część osobników tej populacji ma genotyp  $A_1A_1$ ?
- (b) Jaka część osobników tej populacji ma genotyp  $A_2A_3$ ?
- (c) Dla jakich wartości  $p_1$ ,  $p_2$  i  $p_3$  częstość osobników o genotypie  $A_1A_3$  będzie największa ?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Biomatematyka

91 .....

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Biomatematyka

91 .....

*Zadanie* **2.** (8 punktów)

Liczebność pewnej populacji jest opisana równaniem:

$$N_{n+1} = \lambda N_n (1 + a N_n)^{-b}, \quad (1)$$

w którym,  $N_n$  oznacza liczebność populacji w  $n$ -tej generacji, natomiast  $\lambda$ ,  $a$  oraz  $b$  są dodatnimi stałymi.

- (a) Znajdź rozwiązania stacjonarne równania (1).
- (b) Zbadaj stabilność znalezionych w punkcie (a) rozwiązań.
- (c) Pokaż, że dokonując przeskalowania można zmniejszyć liczbę parametrów modelu.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Biomatematyka

91 .....

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Biomatematyka

91 .....

*Zadanie* **3.** (8 punktów)

Z próby 25 elementowej zmiennej  $X$  obliczono wartość średnią  $\bar{X} = 1$  i odchylenie standardowe  $S_X = 1$ . Z próby 100 elementowej zmiennej  $Y$  obliczono wartość średnią  $\bar{Y} = 1.5$  i odchylenie standardowe  $S_Y = 2$ . Zakładając, że  $X$  i  $Y$  są niezależne, mają rozkład normalny o tej samej wariancji, sprawdź na poziomie istotności  $\alpha = 0.01$  czy wartość oczekiwana zmiennej  $Y$  jest większa od wartości oczekiwanej zmiennej  $X$ .





EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Biomatematyka

91 .....



EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Biomatematyka

91 .....

Zadanie **4.** (8 punktów)

Wykaż, że jeśli przestrzeń metryczna  $(X, d)$  jest zwarta, to również przestrzeń metryczna  $(X, \tilde{d})$  gdzie  $\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)}$ ,  $x, y \in X$ , jest zwarta.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Biomatematyka

91 .....

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Biomatematyka

91 .....

*Zadanie* **5.** (8 punktów)

Znajdź wszystkie wartości, które może przyjąć całka  $\int_{\Gamma} \frac{z+i}{(z^2+1)^3} dz$ , jeśli zakładamy, że  $\Gamma$  może być dowolną krzywą zamkniętą kawałkami gładką, która nie przechodzi przez  $\pm i$ .

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Biomatematyka

91 .....

**EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011**  
**Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach**

**92** .....

*Zadanie* **1.** (8 punktów)

Przedsiębiorca przemysłowy może wytwarzać jeden z trzech rodzajów wyrobów: I, II lub III. Zyski (straty) ze sprzedaży tych wyrobów w zależności od popytu kształtowanego przez modę podaje poniższa tabela:

$$W = \begin{array}{c|cccc} \text{Wyroby} & A & B & C & D \\ \hline \text{I} & 5 & 15 & 10 & 0 \\ \hline \text{II} & 10 & 10 & -20 & 30 \\ \hline \text{III} & 40 & 0 & 50 & -30 \end{array}$$

Ustal jaką decyzję powinien podjąć przedsiębiorca, jeśli kieruje się kryterium

- a) Laplace'a;
- b) Hurwicza z  $p = 0.7$ ;
- c) Savage'a.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

92 .....

**EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011**  
**Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach**

**92** .....

*Zadanie* **2.** (8 punktów)

Założmy, że zachodzi hipoteza agregacji oraz dane są tablice trwania życia, gdzie  $l_0 = 1000$ ,  $l_{20} = 900$ ,  $l_{22} = 850$ .

- a) Wiedząc, że prawdopodobieństwo dożycia wieku 21 lat przez 20-latka wynosi 0.99, obliczyć  $l_{21}$ .
- b) Wyznaczyć JSN dla umowy ubezpieczenia dla 20-latka, w której wypłata 100 następuje w pierwszą rocznicę zawarcia umowy, gdy ubezpieczony żyje. W razie śmierci ubezpieczonego przed ukończeniem 22-go roku życia, wypłata 200 następuje w drugą rocznicę zawarcia umowy. Stopa procentowa równa się  $i = 50\%$ .

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

92 .....



**EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011**  
**Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach**

**92** .....

*Zadanie* **3.** (8 punktów)

Z próby 25 elementowej zmiennej  $X$  obliczono wartość średnią  $\bar{X} = 1$  i odchylenie standardowe  $S_X = 1$ . Z próby 100 elementowej zmiennej  $Y$  obliczono wartość średnią  $\bar{Y} = 1.5$  i odchylenie standardowe  $S_Y = 2$ . Zakładając, że  $X$  i  $Y$  są niezależne, mają rozkład normalny o tej samej wariancji, sprawdź na poziomie istotności  $\alpha = 0.01$  czy wartość oczekiwana zmiennej  $Y$  jest większa od wartości oczekiwanej zmiennej  $X$ .





EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

92 .....

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

92 .....

Zadanie **4.** (8 punktów)

Wykaż, że jeśli przestrzeń metryczna  $(X, d)$  jest zwarta, to również przestrzeń metryczna  $(X, \tilde{d})$  gdzie  $\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)}$ ,  $x, y \in X$ , jest zwarta.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

92 .....

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

92 .....

*Zadanie* **5.** (8 punktów)

Znajdź wszystkie wartości, które może przyjąć całka  $\int_{\Gamma} \frac{z+i}{(z^2+1)^3} dz$ , jeśli zakładamy, że  $\Gamma$  może być dowolną krzywą zamkniętą kawałkami gładką, która nie przechodzi przez  $\pm i$ .

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

92 .....



EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Matematyka z informatyką

93 .....

Zadanie **1.** (8 punktów)

Wyznaczyć zera wielomianu Czebyszewa:

$$T_9 = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x.$$

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Matematyka z informatyką

**93** .....

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Matematyka z informatyką

**93** .....

*Zadanie* **2.** (8 punktów)

Dany jest program:

```
char M[] = "matematyka_z_informatyka";

char *f(char *ws, char c)
{
    for( ; *ws ; ++ws)
    {
        if( *ws==c )
            return ws;
    }
    return NULL;
}

int main()
{
    char *ws,n;

    for(n=0,ws=f(M,'m'); ws!=NULL; ws=f(++ws,'a'))
        printf("%2i\n", (++n,ws-M));
    printf("\nn: %2i\n",n);
    return 0;
}
```

Pytania:

1. Co zostanie wyświetlone na ekranie ?
2. Narysować schemat blokowy programu.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Matematyka z informatyką

**93** .....

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Matematyka z informatyką

93 .....

*Zadanie* **3.** (8 punktów)

Z próby 25 elementowej zmiennej  $X$  obliczono wartość średnią  $\bar{X} = 1$  i odchylenie standardowe  $S_X = 1$ . Z próby 100 elementowej zmiennej  $Y$  obliczono wartość średnią  $\bar{Y} = 1.5$  i odchylenie standardowe  $S_Y = 2$ . Zakładając, że  $X$  i  $Y$  są niezależne, mają rozkład normalny o tej samej wariancji, sprawdź na poziomie istotności  $\alpha = 0.01$  czy wartość oczekiwana zmiennej  $Y$  jest większa od wartości oczekiwanej zmiennej  $X$ .





EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Matematyka z informatyką

**93** .....



EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Matematyka z informatyką

93 .....

Zadanie **4.** (8 punktów)

Wykaż, że jeśli przestrzeń metryczna  $(X, d)$  jest zwarta, to również przestrzeń metryczna  $(X, \tilde{d})$  gdzie  $\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)}$ ,  $x, y \in X$ , jest zwarta.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Matematyka z informatyką

**93** .....

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Matematyka z informatyką

93 .....

*Zadanie* **5.** (8 punktów)

Znajdź wszystkie wartości, które może przyjąć całka  $\int_{\Gamma} \frac{z+i}{(z^2+1)^3} dz$ , jeśli zakładamy, że  $\Gamma$  może być dowolną krzywą zamkniętą kawałkami gładką, która nie przechodzi przez  $\pm i$ .

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Matematyka z informatyką

**93** .....

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Matematyka nauczycielska

94 .....

Zadanie **1.** (8 punktów)

Czworokąty  $ABCD$  i  $APQR$  są kwadratami. Udowodnij, że  $|BP| = |DR|$ .

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Matematyka nauczycielska

94 .....

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Matematyka nauczycielska

94 .....

*Zadanie* **2.** (8 punktów)

Jaka jest ostatnia cyfra liczby  $7^{2011}$  ?

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Matematyka nauczycielska

94 .....



EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Matematyka nauczycielska

94 .....

*Zadanie* **3.** (8 punktów)

Z próby 25 elementowej zmiennej  $X$  obliczono wartość średnią  $\bar{X} = 1$  i odchylenie standardowe  $S_X = 1$ . Z próby 100 elementowej zmiennej  $Y$  obliczono wartość średnią  $\bar{Y} = 1.5$  i odchylenie standardowe  $S_Y = 2$ . Zakładając, że  $X$  i  $Y$  są niezależne, mają rozkład normalny o tej samej wariancji, sprawdź na poziomie istotności  $\alpha = 0.01$  czy wartość oczekiwana zmiennej  $Y$  jest większa od wartości oczekiwanej zmiennej  $X$ .





EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Matematyka nauczycielska

94 .....

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Matematyka nauczycielska

94 .....

Zadanie **4.** (8 punktów)

Wykaż, że jeśli przestrzeń metryczna  $(X, d)$  jest zwarta, to również przestrzeń metryczna  $(X, \tilde{d})$  gdzie  $\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)}$ ,  $x, y \in X$ , jest zwarta.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Matematyka nauczycielska

94 .....

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Matematyka nauczycielska

94 .....

*Zadanie* **5.** (8 punktów)

Znajdź wszystkie wartości, które może przyjąć całka  $\int_{\Gamma} \frac{z+i}{(z^2+1)^3} dz$ , jeśli zakładamy, że  $\Gamma$  może być dowolną krzywą zamkniętą kawałkami gładką, która nie przechodzi przez  $\pm i$ .

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Matematyka nauczycielska

94 .....



EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Matematyka teoretyczna

95 .....

*Zadanie* **1.** (8 punktów)

Niech  $G$  będzie grupą skończoną której rząd jest podzielny przez liczbę pierwszą  $p$ . Ciągi  $g_1, g_2, \dots, g_p$  takie że  $g_1 g_2 \dots g_p = e$  nazywamy równoważnymi jeśli jeden powstaje z drugiego przez przesunięcie cykliczne. Pokazać, że każda klasa równoważności zawiera 1 lub  $p$  elementów. Posługując się tym faktem wykazać, że w  $G$  istnieje element rzędu  $p$ .

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Matematyka teoretyczna

95 .....

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Matematyka teoretyczna

95 .....

*Zadanie* **2.** (8 punktów)

Rozważmy kratę  $Z^2$ . Traktujemy ją jako graf łącząc krawędziami każdy z punktów z czterema sąsiadami. Następnie każdą krawędź usuwamy bądź zostawiamy niezależnie z prawdopodobieństwem odpowiednio  $p$  i  $q$ . Nowy graf jest oczywiście przestrzenią metryczną z metryką geodezyjną i miarą liczącą. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że:

przestrzeń ma własność podwajania tzn, istnieje stała  $C$ , taka że

$$\mu(B(x, 2R)) \leq C\mu(B(x, R))$$

dla każdego  $x, R$ .

$B(x, R)$  oznacza tu kulę o środku w  $x$  i promieniu  $R$ .

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Matematyka teoretyczna

95 .....

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Matematyka teoretyczna

95 .....

*Zadanie* **3.** (8 punktów)

Niech  $A(t)$  będzie rosnąca do nieskończoności, różniczkowalną funkcją.  
Rozważmy równanie:  $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + A(t)x(t) = 0$ . Udowodnić, że ma ono wszystkie  
rozwiązania ograniczone dla  $t > 0$ .

**Wskazówka:** Badać odpowiednią funkcje Lapunowa.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Matematyka teoretyczna

95 .....

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Matematyka teoretyczna

95 .....

Zadanie **4.** (8 punktów)

Wykaż, że jeśli przestrzeń metryczna  $(X, d)$  jest zwarta, to również przestrzeń metryczna  $(X, \tilde{d})$  gdzie  $\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)}$ ,  $x, y \in X$ , jest zwarta.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Matematyka teoretyczna

95 .....



EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Matematyka teoretyczna

95 .....

*Zadanie* **5.** (8 punktów)

Znajdź wszystkie wartości, które może przyjąć całka  $\int_{\Gamma} \frac{z+i}{(z^2+1)^3} dz$ , jeśli zakładamy, że  $\Gamma$  może być dowolną krzywą zamkniętą kawałkami gładką, która nie przechodzi przez  $\pm i$ .

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Matematyka teoretyczna

95 .....

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Zastosowania

96 .....

*Zadanie* **1**. (8 punktów)

Niech  $X_n, Y_n$  będą wzajemnie niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach  $\chi^2(n)$  oraz  $\mathcal{N}(n, n)$  (wariancja wynosi  $n$ ) odpowiednio. Zbadać zbieżność ilorazu

$$\frac{X_n - Y_n}{\sqrt{n}},$$

gdy  $n \rightarrow \infty$ . Odpowiedź uzasadnić.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Zastosowania

96 ..... ..

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Zastosowania

96 .....

*Zadanie* **2.** (8 punktów)

Niech  $\{B_1(t) : t \geq 0\}$ ,  $\{B_2(t) : t \geq 0\}$ ,  $\{B_3(t) : t \geq 0\}$  będą niezależnymi standardowymi ruchami Browna określonymi na tej samej przestrzeni probabilistycznej. Znaleźć wszystkie  $a$  takie, że  $B_1(t) - 2B_2(a^2t) + a^2B_3(t)$  jest standardowym ruchem Browna.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Zastosowania

96 .....

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Zastosowania

96 .....

*Zadanie* **3.** (8 punktów)

Niech  $\underline{X} = (X_1, X_2)'$  będzie próbą losową z rozkładu o gęstości:

$$P(X = i) = (e^\theta - 1)^{-1} \theta^i!, \quad i = 1, 2, \dots,$$

gdzie  $\theta > 0$ . Znajdź nieobciążony z jednostajnie minimalną wariancją estymator parametru  $\theta$ .

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Zastosowania

96 .....



EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Zastosowania

96 .....

Zadanie **4.** (8 punktów)

Wykaż, że jeśli przestrzeń metryczna  $(X, d)$  jest zwarta, to również przestrzeń metryczna  $(X, \tilde{d})$  gdzie  $\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)}$ ,  $x, y \in X$ , jest zwarta.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Zastosowania

96 .....

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Zastosowania

96 .....

*Zadanie* **5.** (8 punktów)

Znajdź wszystkie wartości, które może przyjąć całka  $\int_{\Gamma} \frac{z+i}{(z^2+1)^3} dz$ , jeśli zakładamy, że  $\Gamma$  może być dowolną krzywą zamkniętą kawałkami gładką, która nie przechodzi przez  $\pm i$ .

EGZAMIN MAGISTERSKI, 23.09.2011  
Zastosowania

96 .....