

1. Wyznacz wszystkie lokalne maksima i wszystkie lokalne minima funkcji

$$f(x, y) = (x^2 - 1)^2 - (y^2 - 1)^2.$$

2. Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n^2 + k}{n^3 + k}.$$

3. Rozwiąż następujące zagadnienie początkowe

$$u'(t) = 1 + (u(t))^2, \quad u(0) = 0.$$

4. Podaj przykład macierzy $A \in M_{3 \times 3}(\mathbf{R})$, takiej że dokładnie jeden z następujących wektorów nie jest jej wektorem własnym:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

5. Rozważmy pierścień $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbf{R} \right\}$ z dodawaniem i mnożeniem macierzy jako działaniami, macierzą $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ jako zerem i $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ jako jedyneką.

a) Uzasadnij, że R jest pierścieniem przemiennym.

b) Wyznacz wszystkie ideały pierścienia R .

6. Dla zdarzeń A i B zachodzi:

$$P(A) = 1/4, \quad P(B|A) = 1/2, \quad P(A|B) = 1/3.$$

Wylicz $P(A \cap B)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$.