EGZAMIN MAGISTERSKI, luty 2013
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

Zadanie **1. (8 punktów)**

Załóżmy, że zachodzi hipoteza jednorodnej populacji (HJP) oraz że funkcja natężenia zgonów jest funkcją stałą przyjmującą wartość 0.02 dla każdego $t \geqslant 0$ $(\mu_t = 0.02)$.

(a) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że 25-latek umrze między 30 a 40 rokiem życia.

(b) Oblicz jednorazową składkę netto czystego ubezpieczenia na dożycie na 2 lata, dla 25-latka, na sumę ubezpieczenia 1000 PLN. Do obliczeń przyjmij, że siła stopy procentowej wynosi $\delta = 0.04$.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Rozwiąż następujące zagadnienie programowania liniowego:

Zmaksymalizować $$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5,$$

przy ograniczeniach

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & & & = & 10 \\ x_1 & - & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 4 \end{array}$$

$$x_i \geqslant 0.$$

Zadania **3, 4, 5.**

Takie same, jak dla specjalności *Matematyka nauczycielska* .

EGZAMIN MAGISTERSKI, luty 2013
Matematyka z informatyką

Zadanie **1.** **(8 punktów)**
Dla danego układu równań liniowych:

$$\begin{cases} 3x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \\ x_1 & + & 6x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 0 \end{cases}$$

wykonać następujące polecenia:

1. napisać schemat iteracyjny wyznaczania rozwiązania układu metodą Jacobiego,
2. uzasadnić zbieżność otrzymanego schematu,
3. zdefiniować normę macierzową dzięki której możemy się odwołać do twierdzenia Banacha o punkcie stałym przy uzasadnianiu zbieżności metody.

Zadanie **2.** **(8 punktów)**
Niech będzie dany następujący program napisany w C++ :

```
class Cabc {
   int n;
   public:
     Cabc(int _n) {n = _n;}
     void a(int &S) {
         S = 0;
         while( n-- )
            S += ( n%2 ? b(n/2,1) : b(n/2) );
     }
     int b(int x) {return 2*x;}
     int b(int x, int y) {return 2*x+y;}
};

int main() {
   Cabc *abc;
   int S;
   for(int i=1; i<=7; ++i) {
      abc = new Cabc(i);
      abc->a(S);
      delete abc;
      std::cout << S << " ";
   }
   std::cout << std::endl;
   return 0;
}
```

Pytania:

1. Co zostanie wyświetlone na ekranie komputera w wyniku działania programu?
2. Opisać wzorami matematycznymi otrzymany wynik.
3. Narysować schemat blokowy działania programu.
4. Napisać program w C realizujący w prostszy sposób przedstawione zadanie.

Zadania **3, 4, 5.**

Takie same, jak dla specjalności *Matematyka nauczycielska* .

EGZAMIN MAGISTERSKI, luty 2013
Matematyka nauczycielska

Zadanie **1. (8 punktów)**
Udowodnij, że liczba $2^{55}+1$ dzieli się przez 11.

Zadanie **2. (8 punktów)**
Udowodnij, że jeśli figura na płaszczyźnie ma dokładnie dwie osie symetrii, to są one do siebie prostopadłe.

Zadanie **3. (8 punktów)**
Liczbę zgłoszeń w jednostce czasu do systemu można modelować przy pomocy rozkładu Poissona o gęstości

$$p(k)=\frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}, \quad k=0,1,2....$$

Niech $k_1,k_2,...,k_n$ będą niezależnymi obserwacjami liczby zgłoszeń do systemu w jednostce czasu, a więc realizacją $n-$elementowej próby losowej z rozkładu Poissona z parametrem μ. Na podstawie próby chcemy, metodą największej wiarygodności, estymować wartość nieznanego parametru μ.

(a) Podaj postać funkcji wiarygodności.

(b) Wyznacz estymator największej wiarygodności parametru μ.

(c) Podaj postać estymatora największej wiarygodności prawdopodobieństwa zera w rozkładzie Poissona z parametrem μ.

Zadanie **4. (8 punktów)**
Zdefiniujmy na $\mathbb{R}$ następującą funkcję

$$d(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{dla } x=y \\ |x|+|y| & \text{dla } x\neq y. \end{cases}$$

Sprawdź, że d jest metryką. Czy $(\mathbb{R},d)$ jest przestrzenią ośrodkową?

Zadanie **5. (8 punktów)**
Korzystając ze wzoru Cauchy'ego na pochodną wyznacz całkę

$$\int_{|z|=R}\frac{1}{(z-b)(z-a)^m}dz, \quad |a|<R<|b|.$$

EGZAMIN MAGISTERSKI, luty 2013
Matematyka teoretyczna

Zadanie **1. (8 punktów)**
Określ w wybrany przez siebie sposób ciało $\mathbb{F}_9$. Podaj w języku swojego opisu:

1. mimimalny zbiór generatorów grupy addytywnej,

   oraz

2. mimimalny zbiór generatorów grupy multiplikatywnej elementów odwracalnych.

Zadanie **2. (8 punktów)**
Udowodnij, że w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej, dla każdej elipsoidy istnieje taka płaszczyzna, że ich przekrój jest okręgiem.

Zadanie **3. (8 punktów)**
rzeczywistych $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ takimi, że równość

$$P(x,y) = Q(x,y)$$

zachodzi dla wszystkich par $(x,y) \in A$ z pewnego zbioru $A \subset \mathbb{R}^2$, który ma dodatnią dwuwymiarową miarę Lebesgue'a. Czy musi być $P = Q$?

Zadanie **4. (8 punktów)**
Zdefiniujmy na $\mathbb{R}$ następującą funkcję

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = y \\ |x| + |y| & \text{dla } x \neq y. \end{cases}$$

Sprawdź, że d jest metryką. Czy $(\mathbb{R}, d)$ jest przestrzenią ośrodkową?

Zadanie **5. (8 punktów)**
Korzystając ze wzoru Cauchy'ego na pochodną wyznacz całkę

$$\int_{|z|=R} \frac{1}{(z-b)(z-a)^m} dz, \quad |a| < R < |b|.$$