

**EGZAMIN LICENCJACKI (zadania otwarte)**  
**20 czerwca 2013 r.**

**Zadanie 1.** Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą  $a$ , że prosta o równaniu  $x = a$  dzieli zbiór

$$\left\{ (x, y) : x \geq 1 \wedge 0 \leq y \leq \frac{1}{x^2 + 3x} \right\}$$

na dwie figury o równych polach.

**Zadanie 2.** Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$$

na zbiorze

$$\left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \wedge x + y + z = \sqrt{3} \right\}.$$

Wyznaczyć wszystkie punkty, w których wartości najmniejsza i największa są osiągnane.

**Zadanie 3.** Rozwiązać następujące zagadnienie początkowe

$$\begin{aligned} x''(t) - x'(t) &= e^t, \\ x(0) &= 0, \quad x'(0) = 1. \end{aligned}$$

**Zadanie 4.** Interesują nas takie macierze kwadratowe  $A$  (o wyrazach rzeczywistych) rozmiaru  $7 \times 7$ , że

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}.$$

Rozstrzygnąć, ile jest takich macierzy.

**Wskazówka:** Wybrać i uzasadnić jedną z odpowiedzi: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 13; 16; 32; 64; 128; 256; skończenie wiele, ale więcej niż 1000; nieskończenie wiele.

**Zadanie 5.** Dana jest skończona grupa nieabelowa (nieprzemienne)  $G$  oraz jej elementy  $a, b$  rzędu 2. Dowieść, że rzędy elementów  $ab$  oraz  $ba$  są równe.

**Zadanie 6.** Państwo Kowalscy zlecili firmie remontowej malowanie mieszkania składającego się z czterech pomieszczeń. Malowanie każdego pomieszczenia zaplanowane jest na osobny dzień, a przy podpisywaniu umowy z firmą państwo Kowalscy wnoszą z góry opłatę 1000 zł za każdy dzień pracy ekipy malarskiej.

Każdego dnia, z prawdopodobieństwem 0.2, szef firmy może ogłosić dzień malarski. W takim wypadku, zgodnie z regulaminem firmy, malarze nie przychodzą do pracy, ale zaplanowane na ten dzień usługi uznaje się za wykonane. Ilekroć się to zdarzy w czasie planowanego malowania w mieszkaniu państwa Kowalskich, będą musieli oni podpisać z firmą kolejną umowę na pomalowanie pomieszczenia, które nie zostało pomalowane z powodu ogłoszenia dnia malarskiego, i ponownie wnieść opłatę za usługę (jeśli mają pecha, mogą płacić za pomalowanie tego samego pomieszczenia wiele razy).

Obliczyć wartość oczekiwaną kosztów malowania mieszkania.

**Zadania 4, 6 po 4 punkty, pozostałe po 3 punkty.**