EGZAMIN MAGISTERSKI, 18 września 2013
Biomatematyka

Zadanie **1. (8 punktów)**
Liczebność populacji pewnego gatunku jest modelowana przez równanie różnicowe

$$N_{n+1} = \frac{rN_n^2}{A+N_n^2},$$

w którym N_k oznacza liczebność populacji w $k-$tej generacji, a r i A są dodatnimi stałymi.

(i) Znajdź rozwiązania stacjonarne powyższego równania.

(ii) Zbadaj stabilność znalezionych w punkcie (i) rozwiązań.

Zadanie **2. (8 punktów)**
W próbie losowej o liczebności 100 z populacji znajdującej się w równowadze Hardy'ego-Weinberga, zaobserwowano następujące liczebności poszczególnych genotypów

AA	**Aa**	**aa**
n_{AA}	n_{Aa}	n_{aa}
49	26	25

(i) Zaproponuj postać estymatora częstości alleli w populacji.

(ii) Dla danych z zadania podaj wartość estymatora częstości allelu **A** w tej populacji.

(iii) Przypuśćmy, że w opisanej w zadaniu sytuacji znamy jedynie liczebność próby oraz liczebność osobników o genotypie **aa**. Czy można wtedy wyestymować częstość występowania allelu **A** w tej populacji ?

Zadania **3, 4, 5.**
Takie same, jak dla specjalności *Matematyka nauczycielska.*

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18 września 2013
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

Zadanie **1. (8 punktów)**

Rozwiąż następujące zagadnienie programowania liniowego:

zmaksymalizować wyrażenie $2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4$,

przy ograniczeniach

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 4 \\ x_1 & + & 4x_2 & & & + & x_4 & = & 32 \\ x_1 & & & + & x_3 & & & = & 8 \end{array}$$

$$x_i \geqslant 0.$$

Zadanie **2. (8 punktów)**

Oblicz jednorazową składkę netto ubezpieczenia na życie spełniającego następujące warunki:

– ubezpieczenie zostało zawarte na 5 lat przez osobę w wieku 30 lat;

– świadczenie jest płatne w chwili śmierci ubezpieczonego;

– w trakcie trwania ubezpieczenia jego suma rośnie jednostajnie wraz z upływem czasu od 0 PLN do 100 PLN.

Do obliczeń przyjmij, że natężenie oprocentowania oraz natężenie zgonów są stałe w rozpatrywanym okresie i przyjmują jednakową wartość równą 0,05.

Zadania **3, 4, 5.**

Takie same, jak dla specjalności *Matematyka nauczycielska.*

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18 września 2013
Matematyka z informatyką

Zadanie **1.** **(8 punktów)**

Dla danej funkcji $f(x)=x^k$, gdzie $k \geqslant 2$ liczba naturalna, określonej na zbiorze $\mathbb{R}$ wykazać, że ciąg określony rekurencyjnie

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_0 \in \mathbb{R},\, a_0 \neq 0 - \text{dowolna liczba}, & n=0 \\ a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}, \qquad \text{dla} & n>0 \end{cases}$$

jest zbieżny do zera.

Zadanie **2.** **(8 punktów)**

Niech będzie dany program napisany w C

```
const int N=7;

int a() {   return 1; }

int b() {    return -1; }

int f(int n, int (*x)() ) {    return (*x)()*n; }

int main() {    int i,r,S=0;

   for(i=1; i<=N; ++i)
   {
      r = f(i, (i%2?a:b));
      printf("%i ",r);
      S += r;
   }
   printf("\nS: %i\n", S);
   return 0;
}
```

Pytania:

1. Co zostanie wyświetlone w wyniku działania programu na ekranie komputera?
2. Wyrazić wzorem matematycznym, w zależności od N, otrzymany wynik.
3. Napisać program w C, realizujący w prostszy sposób przedstawione zadanie.

Zadania **3, 4, 5.**

Takie same, jak dla specjalności *Matematyka nauczycielska*.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18 września 2013
Matematyka nauczycielska

Zadanie **1. (8 punktów)**

Pokazać, że dla dowolnej parzystej liczby naturalnej n, liczba 13^n+6 dzieli się przez 7.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Dwa okręgi o promieniach 3 i 8 są zewnętrznie styczne w punkcie A. Obliczyć odległość punktu A od prostej, która jest zewnętrznie styczna do obu okręgów.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech $X_1, X_2, ..., X_n$ będzie prostą próbą losową z rozkładu normalnego o wariancji jeden i nieznanej średniej μ.

1. Wyznacz postać estymatora największej wiarogodności parametru μ.
2. Czy otrzymany w ten sposób estymator jest nieobciążonym estymatorem parametru μ?

Zadanie **4. (8 punktów)**

Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną. Dla $p \in X$ i zbioru $A \subset X$ liczbę

$$\mathrm{dist}(p,A) = \inf\{d(p,a) : a \in A\}$$

nazywamy odległością p od zbioru A. Dla

$$A = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 4\} \subset \mathbb{R}^2 = X.$$

wyznacz $\mathrm{dist}((2,2),A)$ w przypadku, jeśli w $\mathbb{R}^2$ mamy metrykę:

1. euklidesową,
2. maksimum,
3. taksówkową.

Odpowiedź uzasadnij rachunkami.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Pokaż, że każda funkcja analityczna w $\mathbb{C}$, o wartościach leżących na paraboli

$$y = x^2 + x + 1,$$

musi być w tym obszarze stała.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18 września 2013
Matematyka teoretyczna

Zadanie **1. (8 punktów)**

Zdefiniuj wszystkie ciała skończone (podając zbiór i działania) o takiej własności, że ich grupa multiplikatywna ma dokładnie dwa elementy, których rząd jest liczbą pierwszą.

Zadanie **2. (8 punktów)**

W $\mathbb{R}^4$ ze standardową metryką euklidesową wybrano 17 punktów. Każda współrzędna każdego z tych punktów jest liczbą z przedziału $[0,1]$. Udowodnij, że odległość pewnych dwóch z tych punktów jest nie większa niż 1.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech L_n będzie ciągiem operatorów samosprzężonych na pewnej przestrzeni Hilberta. Załóżmy, że L_n jest mocno zbieżny do operatora L.

1. Pokazać, że wtedy promienie spektralne $r(L_n)$ są zbieżne do $r(L)$.
2. Czy odpowiedź zmieni się, jeśli wyrzucimy założenie samosprzężności operatorów L_n?

Zadanie **4. (8 punktów)**

Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną. Dla $p\in X$ i zbioru $A\subset X$ liczbę

$$\operatorname{dist}(p,A)=\inf\{d(p,a):a\in A\}$$

nazywamy odległością p od zbioru A. Dla

$$A=\{(x,y):x^2+y^2=4\}\subset\mathbb{R}^2=X.$$

wyznacz $\operatorname{dist}((2,2),A)$ w przypadku, jeśli w $\mathbb{R}^2$ mamy metrykę:

1. euklidesową,
2. maksimum,
3. taksówkową.

Odpowiedź uzasadnij rachunkami.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Pokaż, że każda funkcja analityczna w $\mathbb{C}$, o wartościach leżących na paraboli

$$y=x^2+x+1,$$

musi być w tym obszarze stała.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 18 września 2013
Zastosowania

Zadanie **1. (8 punktów)**

Dla $n=1,2,\dots$ niech $X_{n1},X_{n2},\dots$ będą niezależnymi zmienny losowymi o jednakowym rozkładzie

$$P(X_{n1}=0)=1-\frac{a_1+a_2}{n}, \quad P(X_{n1}=1)=\frac{a_1}{n}, \quad P(X_{n1}=2)=\frac{a_2}{n}$$

dla pewnych stałych $a_1>0, a_2>0$. Niech $S_n=X_{n1}+\ldots+X_{nn}$. Korzystając z teorii funkcji charakterystycznych wykazać, że ciąg S_n zbiega według rozkładu. Zidentyfikować rozkład graniczny. Uzasadnić poszczególne przejścia powołując się na odpowiednie twierdzenia.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Niech X_t i Y_t będą niezależnymi ruchami Browna. Udowodnij, że

$$R_t=X_t^2+Y_t^2$$

jest podmartyngałem.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech $X_1,X_2,...,X_n$ będzie prostą próbą losową z rozkładu dwumianowego $b(N,p)$, o znanym prawdopodobieństwie sukcesu p i nieznanej liczbie prób N. Wyznacz postać estymatora największej wiarygodności parametru N.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną. Dla $p\in X$ i zbioru $A\subset X$ liczbę

$$\operatorname{dist}(p,A)=\inf\{d(p,a):a\in A\}$$

nazywamy odległością p od zbioru A. Dla

$$A=\{(x,y):x^2+y^2=4\}\subset\mathbb{R}^2=X.$$

wyznacz $\operatorname{dist}((2,2),A)$ w przypadku, jeśli w $\mathbb{R}^2$ mamy metrykę:

1. euklidesową,
2. maksimum,
3. taksówkową.

Odpowiedź uzasadnij rachunkami.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Pokaż, że każda funkcja analityczna w $\mathbb{C}$, o wartościach leżących na paraboli

$$y=x^2+x+1,$$

musi być w tym obszarze stała.