

EGZAMIN LICENCJACKI (zadania otwarte)
17 lutego 2014 r.

Zadanie 1. Wyznaczyć **promień** zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n^2} \cdot x^{n^2}}{((2n)!)^n}.$$

Zadanie 2. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x, y, z) = 2x + 3y + 6z$$

na sferze

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Wyznaczyć wszystkie punkty, w których wartości najmniejsza i największa są osiągane.

Zadanie 3. Rozwiązać liniowe zagadnienie początkowe

$$x'(t) + x(t) = 2ae^t, \quad x(0) = a + 1$$

w zależności od parametru $a > 0$.

Zadanie 4. Rozważamy przestrzeń liniową wielomianów o współczynnikach rzeczywistych, stopnia nie większego od 5, z dodawaniem wielomianów i mnożeniem wielomianów przez liczby rzeczywiste jako działaniami.

Przekształcenie liniowe F tej przestrzeni jest zdefiniowane wzorem

$$F(W(x)) = x^2 W''(x).$$

Wyznaczyć wszystkie wartości własne przekształcenia F wraz z odpowiadającymi im podprzestrzeniami własnymi (podprzestrzeniami wektorów własnych).

Zadanie 5. Podać przykład skończonej grupy abelowej (przemiennej) oraz takich jej elementów a, b rzędu 30, że element ab ma rząd 10.

Zadanie 6. Leonard Mlodinow poddał się testowi na obecność wirusa HIV. Test wykazał, że Mlodinow jest zarażony wirusem HIV. Wiadomo, że test daje prawidłowy wynik z prawdopodobieństwem 0,999. Wiadomo też, że Mlodinow jest heteroseksualnym białym Amerykaninem płci męskiej, nieprzyjmującym narkotyków dożylnie, a ze statystyk wynika, że w tej grupie tylko jedna osoba na 10 tysięcy jest zarażona wirusem HIV.

Na podstawie powyższych danych określić prawdopodobieństwo, że Leonard Mlodinow jest zarażony wirusem HIV.

Zadania 4, 6 po 4 punkty, pozostałe po 3 punkty.