1. Dany jest taki szereg zbieżny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, że $a_1=5$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n=100$. Podać sumy następujących szeregów:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}+a_n)=$ ....

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)=$ ....

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_{n+1}^2-a_n^2\right)=$ ....

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2^{a_{n+1}}-2^{a_n})=$ ....

2. Dla każdej funkcji różniczkowalnej $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniającej warunki $f(a)=0$ oraz $f(b)=60$ istnieje taka liczba rzeczywista x, że $f'(x)=c$. Dla podanych a, b wskazać taką liczbę rzeczywistą c, aby powyższe zdanie było prawdziwe.

a) $a=4$, $b=0$, $c=$ ....

b) $a=3$, $b=8$, $c=$ ....

c) $a=2$, $b=8$, $c=$ ....

d) $a=1$, $b=11$, $c=$ ....

3. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich takich wartości rzeczywistych parametru p, że dla dowolnych $x,y\in\mathbb{R}$ zachodzi nierówność $W(x,y)\geqslant 0$.

a) $W(x,y)=x^2+xy+py^2$, $p\in$ ....

b) $W(x,y)=x^2+pxy+y^2$, $p\in$ ....

c) $W(x,y)=px^2+xy+py^2$, $p\in$ ....

d) $W(x,y)=x^2-xy+py^2$, $p\in$ ....

4. Niech $C(a,b)=\left[\int\limits_a^b \frac{dx}{\log_3 x}\right]$, gdzie $[y]$ oznacza część całkowitą liczby y. Podać wartości poniższych wyrażeń.

a) $C(100,120)=$ ....

b) $C(20,26)=$ ....

c) $C(50,62)=$ ....

d) $C(85,100)=$ ....

5. Dla podanych a, b podać taką liczbę c, aby $\int\limits_a^b \frac{2x}{x^2+7}dx=\ln c$.

a) $a=1, \quad b=3, \quad c=$ ....

b) $a=2, \quad b=9, \quad c=$ ....

c) $a=3, \quad b=5, \quad c=$ ....

d) $a=5, \quad b=11, \quad c=$ ....

6. Niech $z=\frac{3}{5}+\frac{4i}{5}$. Dla podanych liczb m, n podać taką liczbę rzeczywistą k, aby zachodziła równość $z^m\cdot\overline{z}^n=z^k$.

a) $m=50, \quad n=4, \quad k=$ ....

b) $m=20, \quad n=3, \quad k=$ ....

c) $m=10, \quad n=1, \quad k=$ ....

d) $m=15, \quad n=2, \quad k=$ ....

7. Dla podanej macierzy wskazać taką wartość parametru p, aby wyznacznik macierzy był równy 0.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & p \end{pmatrix}$, $p=$ ....

b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 8 & 9 & p \end{pmatrix}$, $p=$ ....

c) $\begin{pmatrix} 1 & 10 & 21 \\ 1 & p & 5 \\ 3 & 5 & 13 \end{pmatrix}$, $p=$ ....

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & p & 5 \end{pmatrix}$, $p=$ ....

8. Dla wskazanej wartości parametru p podać zbiór rzeczywistych wartości własnych macierzy $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ p & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) $p=-1$, $\{$...$\}$

b) $p=3$, $\{$...$\}$

c) $p=1$, $\{$...$\}$

d) $p=0$, $\{$..$\}$

9. Liczbę naturalną n nazwiemy *dobrą*, jeżeli każy element grupy cyklicznej rzędu n, różny od elementu neutralnego, jest jej generatorem. Dla podanej liczby m podać najmniejszą *dobrą* liczbę $n>m$.

a) $m=28$, $n=$ ....

b) $m=14$, $n=$ ....

c) $m=7$, $n=$ ....

d) $m=21$, $n=$ ....

10. Dla podanej liczby n podać największy rząd elementu grupy permutacji S_n.

a) $n=9$, ...

b) $n=7$, ...

c) $n=5$, ...

d) $n=6$, ...

11. Losujemy liczbę ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$. Niech $E(n)$ będzie wartością oczekiwaną wylosowanej liczby. Wówczas

a) $E(2014)=$ ....

b) $E(6)=$ ....

c) $E(10)=$ ....

d) $E(15)=$ ....

12. W pierwszej urnie jest jedna kula czarna i jedna kula biała, a w drugiej urnie jest jedna kula biała i n kul czarnych. Z losowo wybranej urny losujemy jedną kulę. Niech $P(n)$ będzie prawdopodobieństwem, że wylosowana kula jest biała. Wówczas

a) $P(2)=$ ....

b) $P(3)=$ ....

c) $P(5)=$ ....

d) $P(1)=$ ....