EGZAMIN LICENCJACKI (zadania otwarte)
16 lutego 2015 r.

Zadanie **1.** Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n)!\cdot x^{6n}}{(2n)!\cdot n^{pn}}$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej parametru p, aby promień ten był dodatni i skończony.

Zadanie **2.** Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x,y,z)=x^4+2x^2y^2+y^4+z^4$$

na zbiorze

$$\left\{(x,y,z):\, x^2+y^2+z^2=1 \,\wedge\, x^2+y^2+3z^2=3z\right\}.$$

Wyznaczyć wszystkie punkty, w których wartości najmniejsza i największa są osiągane.

Zadanie **3.** Naczynie w kształcie odwróconego stożka (pionowa oś obrotu, wierzchołek na dole) napełniono wodą. W wierzchołku stożka jest dziura, przez którą wycieka woda. Po jakim czasie wycieknie woda z pełnego naczynia, jeśli wiadomo, że z naczynia wypełnionego do jednej czwartej wysokości woda wycieknie po minucie?

Zakładamy, że prędkość wypływu wody jest wprost proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z głębokości, na jakiej w danym momencie znajduje się dziura, co po oznaczeniu przez $h(t)$ głębokości wody w naczyniu w chwili t, a przez $V(t)=b\cdot(h(t))^3$ objętości pozostałej wody, prowadzi do równania

$$V'=-a\cdot\sqrt{h}$$

dla pewnych stałych dodatnich a, b.

Zadanie **4.** Podać przykład takich macierzy kwadratowych A i B (o wyrazach rzeczywistych) rozmiaru 3×3, że spełnione są następujące warunki:
(i) macierz A ma wartości własne 1, $2-\sqrt{3}$ i $2+\sqrt{3}$,
(ii) macierz B ma wartości własne 1, $2-\sqrt{3}$ i $2+\sqrt{3}$,
(iii) macierz AB ma wartości własne 1, $2-\sqrt{3}$ i $2+\sqrt{3}$.

Zadanie **5.** Dana jest taka grupa G i takie jej elementy a, b, że
(i) element a ma rząd 2,
(ii) rząd elementu b jest liczbą nieparzystą,
(iii) element b nie jest elementem neutralnym,
(iv) zachodzi równość $ba=ab^{33}$. (wykładnik słownie: *trzydzieści trzy*)

a) Wyznaczyć rząd elementu b.

b) Dowieść, że $(ab)^2=e$.

Zadanie **6.** Zawodnik bierze udział w teleturnieju. Prowadzący kładzie na stole 20 zaklejonych kopert i informuje, że w 18 kopertach znajdują się pieniądze, po 100 złotych w każdej, a w pozostałych 2 kopertach kartki z napisem **BANKRUT**.

Zawodnik może wylosować dowolną, wybraną przez siebie, liczbę kopert. Jeżeli we wszystkich wylosowanych kopertach będą znajdować się pieniądze, to pieniądze z wylosowanych kopert staną się wygraną zawodnika. Jeśli przynajmniej jedna wylosowana koperta będzie zawierać BANKRUT-a, zawodnik nie wygra nic.

Ile kopert powinien wylosować zawodnik, aby zmaksymalizować wartość oczekiwaną swojej wygranej?