

1. Podać w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru  $p$ , dla których podany szereg liczbowy jest zbieżny.

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} (p-5)^n$  jest zbieżny  $\Leftrightarrow p \in \dots\dots\dots$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} (p+8)^n$  jest zbieżny  $\Leftrightarrow p \in \dots\dots\dots$

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} (2p-7)^n$  jest zbieżny  $\Leftrightarrow p \in \dots\dots\dots$

d)  $\sum_{n=1}^{\infty} (p^2-3)^n$  jest zbieżny  $\Leftrightarrow p \in \dots\dots\dots$

2. Dla podanej liczby  $x_0$  podać takie liczby  $a, b$ , aby funkcja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < x_0 \\ ax + b & \text{dla } x \geq x_0 \end{cases}$$

była różniczkowalna.

a)  $x_0 = 2, a = \dots\dots\dots, b = \dots\dots\dots$

b)  $x_0 = 1, a = \dots\dots\dots, b = \dots\dots\dots$

c)  $x_0 = 0, a = \dots\dots\dots, b = \dots\dots\dots$

d)  $x_0 = -1, a = \dots\dots\dots, b = \dots\dots\dots$

3. Niech  $C(n) = \int_{-1-\sqrt{1-x^2}}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)^n dy dx$ . Wówczas

a)  $C(2) = \dots\dots\dots$

b)  $C(1) = \dots\dots\dots$

c)  $C(4) = \dots\dots\dots$

d)  $C(3) = \dots\dots\dots$

4. Dla podanych  $a, b$  podać taką liczbę  $c$ , aby  $\int_a^b \frac{3x^2 - 1}{x^3 - x} dx = \ln c$ .

a)  $a = 5, b = 11, c = \dots\dots\dots$

b)  $a = 2, b = 3, c = \dots\dots\dots$

c)  $a = 3, b = 5, c = \dots\dots\dots$

d)  $a = 7, b = 8, c = \dots\dots\dots$

5. Dla każdej funkcji różniczkowalnej  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełniającej warunki  $f(a) = b$  oraz  $f(b) = a$  istnieje taka liczba rzeczywista  $x$ , że  $f'(x) = c$ . Dla podanych  $a, b$  wskazać taką liczbę rzeczywistą  $c$ , aby powyższe zdanie było prawdziwe.

a)  $a = 25 = 5^2, b = 36 = 6^2, c = \dots\dots\dots$

b)  $a = 625 = 5^4, b = 1296 = 6^4, c = \dots\dots\dots$

c)  $a = 125 = 5^3, b = 216 = 6^3, c = \dots\dots\dots$

d)  $a = 3125 = 5^5, b = 7776 = 6^5, c = \dots\dots\dots$

6. Dla podanej liczby zespolonej  $z$  podać najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią  $n$  taką, że  $z^n$  jest liczbą rzeczywistą dodatnią.

a)  $z = (1+i) \cdot (\sqrt{3}+i), n = \dots\dots\dots$

b)  $z = \sqrt{3}+i, n = \dots\dots\dots$

c)  $z = 1+i, n = \dots\dots\dots$

d)  $z = 1+i\sqrt{3}, n = \dots\dots\dots$

**7.** Dla podanej liczby  $a$  wskazać liczby  $b$  i  $c$  o następującej własności: Dla każdego układu równań liniowych z trzema niewiadomymi, którego rozwiązaniami są  $(3, 4, 5)$  oraz  $(1, 5, 9)$ , rozwiązaniem tego układu jest także  $(a, b, c)$ .

a)  $a = 0$ ,  $b = \dots\dots\dots$ ,  $c = \dots\dots\dots$

b)  $a = 2$ ,  $b = \dots\dots\dots$ ,  $c = \dots\dots\dots$

c)  $a = 5$ ,  $b = \dots\dots\dots$ ,  $c = \dots\dots\dots$

d)  $a = 4$ ,  $b = \dots\dots\dots$ ,  $c = \dots\dots\dots$

**8.** Dla podanej macierzy wskazać taką wartość parametru  $p$ , aby wyznacznik macierzy był równy 0.

a)  $\begin{pmatrix} 1 & 10 & 19 \\ 7 & 10 & 13 \\ p & 5 & 13 \end{pmatrix}$ ,  $p = \dots\dots\dots$

b)  $\begin{pmatrix} 17 & 17 & 17 \\ 2014 & 2015 & 2016 \\ 4 & p & 5 \end{pmatrix}$ ,  $p = \dots\dots\dots$

c)  $\begin{pmatrix} 12 & 25 & 38 \\ 4 & 7 & 10 \\ 9 & 4 & p \end{pmatrix}$ ,  $p = \dots\dots\dots$

d)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ 5 & p & 7 \end{pmatrix}$ ,  $p = \dots\dots\dots$

**9.** Dla podanej liczby  $r$  podać najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią  $n$ , dla której w grupie permutacji  $S_n$  istnieje element rzędu  $r$ .

a)  $r = 18$ ,  $n = \dots\dots\dots$

b)  $r = 6$ ,  $n = \dots\dots\dots$

c)  $r = 5$ ,  $n = \dots\dots\dots$

d)  $r = 10$ ,  $n = \dots\dots\dots$

**10.** Dla podanej liczby  $n$  podać liczbę elementów rzędu 12 w grupie cyklicznej rzędu  $n$ .

- a)  $n = 1296 = 6^4$ , .....
- b)  $n = 216 = 6^3$ , .....
- c)  $n = 6$ , .....
- d)  $n = 36 = 6^2$ , .....

**11.** Niech  $P(n, k)$  będzie prawdopodobieństwem, że przy  $n$ -krotnym rzucie monetą wypadnie dokładnie  $k$  orłów. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

- a)  $P(8, 7) =$  .....
- b)  $P(4, 1) =$  .....
- c)  $P(4, 2) =$  .....
- d)  $P(6, 3) =$  .....

**12.** Rzucamy kostką do gry i wypłacamy graczowi kwotę odpowiadającą liczbie wyrzuconych oczek (po 1 złoty za każde oczko). Następnie wykonujemy  $n$  rzutów monetą i za każdym razem, kiedy wypadnie orzeł, podwajamy stan posiadania gracza. Niech  $E(n)$  będzie wartością oczekiwaną wygranej gracza (w złotówkach) po zakończeniu rozgrywki. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

- a)  $E(1) =$  .....
- b)  $E(2) =$  .....
- c)  $E(3) =$  .....
- d)  $E(0) =$  .....