EGZAMIN MAGISTERSKI, czerwiec 2015
Biomatematyka

Zadanie **1. (8 punktów)**

Rozpatrzmy chorobę, która rozprzestrzenia się za pośrednictwem nosicieli, u których nie występują jej symptomy. Niech $C(t)$ oznacza liczbę nosicieli w chwili t. Zakładamy, że nosiciele są rozpoznawani i izolowani ze stałą intensywnością α, a więc

$$\frac{dC}{dt} = -\alpha C.$$

Intensywność, z jaką podatni są zarażani jest proporcjonalna do liczby nosicieli i liczby podatnych, a więc

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SC.$$

Niech C_0 i S_0 będą odpowiednio liczba nosicieli i liczba podatnych w chwili $t = 0$.

(i) Wyznacz liczbę nosicieli w chwili t.

(ii) Wyznacz liczbę podatnych w chwili t.

(iii) Znajdź $\lim_{t\to\infty} S(t)$, liczbę osób, które uniknęły choroby.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Załóżmy, że populacja w obecności drapieżników rozwija się zgodnie z równaniem

$$\frac{dN}{dt} = N(1-N) - \frac{aN}{1+bN}, \quad a,b > 0.$$

(i) Wyznacz stany stacjonarne.

(ii) Określ stabilność wyznaczonych stanów stacjonarnych.

Zadania **3, 4, 5.**

Takie same, jak dla specjalności *Matematyka nauczycielska.*

EGZAMIN MAGISTERSKI, czerwiec 2015
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

Zadanie **1. (8 punktów)**

Przy ustalaniu dobowej racji żywieniowej dla zwierząt hodowlanych wykorzystuje się paszę A oraz paszę B. Racja żywieniowa powinna m.in. zawierać składniki odżywcze:

S_1 (nie mniej niż 27),
S_2 (nie mniej niż 32),
S_3 (nie mniej niż 36).

Zawartości wymienionych składników w 1 kg paszy oraz koszty 1 kg paszy są następujące:

pasza	S_1	S_2	S_3	*koszt*
A	3	8	12	6
B	9	4	3	9

Ustal optymalną rację żywieniową przy warunku minimalnych kosztów własnych. Ile wynosi ich wartość?

Zadanie **2. (8 punktów)**

Rozpatrzmy następujący produkt ubezpieczeniowy dla 20-latka - jeśli umrze on w pierwszym roku trwania umowy to wypłata wynosi 1000 PLN, jeśli żyje na koniec drugiego roku to wypłata wynosi 2000 PLN. Ubezpieczony płaci składki w wysokości x PLN na początku pierwszego roku oraz $2x$ PLN na początku drugiego roku. Znajdź x. Do obliczeń przyjmij, że zachodzi hipoteza jednorodnej populacji, efektywna stopa procentowa w pierwszym roku wynosi $i_1 = 60\%$ natomiast w drugim roku wynosi $i_2 = 25\%$ ponadto $l_{20} = 1000, l_{21} = 800, l_{22} = 400$.

Zadania **3, 4, 5.**

Takie same, jak dla specjalności *Matematyka nauczycielska.*

EGZAMIN MAGISTERSKI, czerwiec 2015
Matematyka z informatyką

Zadanie **1. (8 punktów)**
Co to jest metoda Eulera dla równań różniczkowych zwyczajnych? Opisz jej działanie, zagadnienie jakie rozwiązuje wraz z koniecznymi założeniami, wyprowadź oszacowanie błędu lokalnego i globalnego.

Zadanie **2. (8 punktów)**
Rozważ następującą funkcję napisaną w C++:

```
#include<utility>
int oblicz(int x, int y)
  {
  while(y)
    std::swap(x%=y,y);
  return x;
  }
```

1. Wyjaśnij co oblicza funkcja `oblicz`. Uzasadnij matematyczną poprawność algorytmu.

2. Wyjaśnij dla jakich argumentów działanie tej funkcji jest poprawne a dla jakich nie i dlaczego. Zmodyfikuj funkcję tak, aby zwracała poprawne wyniki dla wszystkich wartości argumentów.

3. Co otrzymamy, gdy uruchomimy obliczenia z argumentem 117 oraz 711? Napisz funkcję testującą dla wybranych przypadków.

Zadania **3, 4, 5.**
Takie same, jak dla specjalności *Matematyka nauczycielska*.

EGZAMIN MAGISTERSKI, czerwiec 2015
Matematyka nauczycielska

Zadanie **1. (8 punktów)**
Udowodnić, że jeśli a i b są liczbami naturalnymi oraz

$$7|a^2+b^2$$

to $7|a$ i $7|b$; (symbol $a|b$ oznacza, że a dzieli b).

Zadanie **2. (8 punktów)**
Dany jest trójkąt o bokach długości $48, 40, 40$. Obliczyć odległości środka ciężkości od poszczególnych wierzchołków.

Zadanie **3. (8 punktów)**
Niech $X_1,...,X_n$ będzie próbą losową z rozkładu wykładniczego o gestości

$$f(x|\theta) = \theta \exp(-\theta x), \;\; \theta > 0, x \geqslant 0.$$

(ii) Wyznacz estymator największej wiarogodności parametru θ.

(iii) Wyznacz metodą momentów estymator parametru θ.

Zadanie **4. (8 punktów)**
Załóżmy, że $A \subset \mathbb{R}$ i $T \subset [0,1]$ są zwartymi podzbiorami prostej euklidesowej. Uzasadnij, że zbiór

$$C = \left\{ ta + (1-t)e^b : a,b \in A, t \in T \right\}$$

jest zwarty.

Zadanie **5. (8 punktów)**
Dla $0 < p < \infty$ policz całkę

$$\int_0^\infty \frac{\cos px}{(1+x^2)^2} dx.$$

EGZAMIN MAGISTERSKI, czerwiec 2015
Matematyka teoretyczna

Zadanie **1. (8 punktów)**
Podaj definicję podgrupy charakterystycznej. Następnie w grupie jedności kwaternionów znajdź wszystkie właściwe podgrupy normalne. Które z nich są podgrupami charakterystycznymi? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie **2. (8 punktów)**
Rozważmy powierzchnię w $\mathbb{R}^3$ zadaną równaniem $z = x^2 - y^2$. Udowodnij, że przez każdy punkt tej powierzchni można poprowadzić prostą zawartą w tej powierzchni.

Zadanie **3. (8 punktów)**
Pokazać, że istnieje taka stała $C > 0$, że dla każdego $N \geqslant 2$ mamy
$$\left|\frac{N}{\log N} - \int_2^N \frac{dx}{\log x}\right| \leqslant C\frac{N}{(\log N)^2}.$$

Zadanie **4. (8 punktów)**
Załóżmy, że $A \subset \mathbb{R}$ i $T \subset [0,1]$ są zwartymi podzbiorami prostej euklidesowej. Uzasadnij, że zbiór
$$C = \left\{ta + (1-t)e^b : a, b \in A, t \in T\right\}$$
jest zwarty.

Zadanie **5. (8 punktów)**
Dla $0 < p < \infty$ policz całkę
$$\int_0^\infty \frac{\cos px}{(1+x^2)^2}dx.$$

EGZAMIN MAGISTERSKI, czerwiec 2015
Zastosowania

Zadanie **1. (8 punktów)**
Zmienna losowa Y_n, gdzie $n = 1,2,\ldots$, ma rozkład gamma Gamma(n,λ). Pokazać zbieżność wg rozkładu

$$\sqrt{n}\left(\frac{\lambda Y_n}{n} - 1\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1).$$

Podać do czego zbiega ciąg

$$\mathbb{P}(|Y_n| \leqslant 1.96), \quad n = 1,2,\ldots$$

Można wykorzystać następujące informacje:

- Dla rozkładu Gamma(a,b)

f. char.	średnia	wariancja
$(1-\frac{it}{b})^{-a}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{a}{b^2}$

- jeśli $N \sim \mathcal{N}(0,1)$, to $\mathbb{P}(N \leqslant 1.96) \approx 0.975$.

Zadanie **2. (8 punktów)**
Niech B_t będzie ruchem Browna. Podaj przykład funkcji f, dla której proces $f(t,B_t)$ jest martyngałem względem naturalnej filtracji B_t oraz udowodnij z definicji martyngału, że podany przykład jest poprawny.

Zadanie **3. (8 punktów)**
Niech $X_1,\ldots,X_n$ będzie próbą z rozkładu $N(\mu,1)$. Wyznacz test jednostajnie najmocniejszy, na poziomie istotności $\alpha = 0.05$, w problemie testowania

$$H_0 : \mu = 1;$$
$$H_1 : \mu = 2.$$

Zadanie **4. (8 punktów)**
Załóżmy, że $A \subset \mathbb{R}$ i $T \subset [0,1]$ są zwartymi podzbiorami prostej euklidesowej. Uzasadnij, że zbiór

$$C = \left\{ta + (1-t)e^b : a,b \in A, t \in T\right\}$$

jest zwarty.

Zadanie **5. (8 punktów)**
Dla $0 < p < \infty$ policz całkę

$$\int_0^\infty \frac{\cos px}{(1+x^2)^2}\,dx.$$