1. Wskazać taką liczbę wymierną w, aby podana liczba była wymierna.

a) $\sqrt[10]{\left(1-\sqrt{2}\right)^{10}}+w\sqrt{2}$, $w=$ ....

b) $\sqrt[5]{\left(1-\sqrt{2}\right)^{10}}+w\sqrt{2}$, $w=$ ....

c) $\sqrt[10]{\left(\sqrt{3}-2\right)^{10}}+w\sqrt{3}$, $w=$ ....

d) $\sqrt[5]{\left(\sqrt{3}-2\right)^{10}}+w\sqrt{3}$, $w=$ ....

2. Zapisać wartość podanej całki w postaci ułamka nieskracalnego lub liczby całkowitej.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1/\sqrt{3}} \frac{dx}{\pi x^2+\pi} =$ ....

b) $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{1} \frac{dx}{\pi x^2+\pi} =$ ....

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \frac{dx}{\pi x^2+\pi} =$ ....

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\pi x^2+\pi} =$ ....

3. Podać dziedzinę funkcji f określonej podanym wzorem.

a) $f(x)=\log_2\log_2\left(x^2\right)$, ...

b) $f(x)=\log_2\left(x^2\right)$, ...

c) $f(x)=\log_2\log_2\log_2\log_2\left(x^2\right)$, ...

d) $f(x)=\log_2\log_2\log_2\left(x^2\right)$, ...

4. Podać promień zbieżności szeregu potęgowego.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$, $R=$ ....

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\binom{2n}{n}\cdot x^{2n}$, $R=$ ....

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n\cdot x^{2n}}{n!}$, $R=$ ....

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!\cdot x^n}{n^n}$, $R=$ ....

5. Podać kres górny zbioru, gdzie $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych.

a) $\sup\left\{\frac{mn}{m^2+n^2}:m,n\in\mathbb{N}\right\}=$ ....

b) $\sup\left\{\frac{mn}{m^2+9n^2}:m,n\in\mathbb{N}\right\}=$ ....

c) $\sup\left\{\frac{mn}{m^2+4n^2}:m,n\in\mathbb{N}\right\}=$ ....

d) $\sup\left\{\frac{mn}{4m^2+9n^2}:m,n\in\mathbb{N}\right\}=$ ....

6. Dla podanej liczby zespolonej z podać najmniejszą taką liczbę całkowitą dodatnią n, że $(z+1)^n$ jest liczbą rzeczywistą dodatnią.

a) $z=i$, $n=$ .... **b)** $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $n=$ ....

c) $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$, $n=$ ...... **d)** $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $n=$ ......

7. Niech $A=\begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Dla podanej macierzy wypisać jej wartości własne (z uwzględnieniem krotności).

a) A .... **b)** A^2 ....

c) A^{-1} .... **d)** A^3 ....

8. Wskazać takie liczby a i b, aby podane 3 punkty w $\mathbb{R}^3$ były współliniowe.

a) $(2,3,4)$, $(4,9,16)$, $(1,a,b)$, $a=$ ...., $b=$ ....

b) $(2,3,4)$, $(4,9,16)$, $(a,b,64)$, $a=$ ...., $b=$ ....

c) $(2,3,4)$, $(4,9,16)$, $(a,27,b)$, $a=$ ...., $b=$ ....

d) $(2,3,4)$, $(4,9,16)$, $(8,a,b)$, $a=$ ...., $b=$ ....

9. Liczbę naturalną n nazwiemy *odlotową*, jeżli w grupie permutacji S_{n-1} nie istnieje element rzędu n. Dla podanych liczb a i b wypisać wszystkie liczby *odlotowe* n spełniające nierówności $a<n<b$.

a) $a=60$, $b=70$, ...

b) $a=30$, $b=40$, ...

c) $a=20$, $b=30$, ...

d) $a=40$, $b=50$, ...

10. Zbiorem elementów grupy jest zbiór $\{1,2,3,\ldots,30\}$, a działaniem jest mnożenie modulo 31. Dla podanego elementu g tej grupy podać element do niego odwrotny.

a) $g=7$, $g^{-1}=$ .... **b)** $g=4$, $g^{-1}=$ ....

c) $g=2$, $g^{-1}=$ .... **d)** $g=3$, $g^{-1}=$ ....

11. Liczbę naturalną n nazwiemy *wyjątkową*, jeżeli przy n-krotnym rzucie monetą prawdopodobieństwo wyrzucenia co najwyżej jednego orła jest odwrotnością liczby całkowitej. Dla podanej liczby k podać najmniejszą liczbę *wyjątkową* n większą od k.

a) $k=100$, $n=$ .... **b)** $k=10$, $n=$ ....

c) $k=20$, $n=$ .... **d)** $k=50$, $n=$ ....

12. W urnie jest b kul białych i c kul czarnych. Losujemy (bez zwracania) trzy kule. Niech $P(b,c)$ oznacza prawdopodobieństwo, że wylosowano trzy kule białe. Podać w postaci ułamka nieskracalnego:

a) $P(4,1)=$ .... **b)** $P(5,1)=$ ....

c) $P(6,4)=$ .... **d)** $P(3,1)=$ ....