EGZAMIN MAGISTERSKI, 13.09.2017
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

Zadanie **1. (8 punktów)**
Dana jest następująca macierz:

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 14 \\ 2 & 10 \\ 8 & 0 \\ 10 & -8 \end{pmatrix}.$$

a) Znajdź rozwiązanie dwuosobowej gry o sumie zero mającej powyższą macierz wypłat.
b) Przyjmując, że M jest macierzą wypłat w grze przeciwko Naturze, wyznacz decyzję optymalną (jedną z czterech) kierując się kryterium:
pesymistów,
minimaksowej straty.

Zadanie **2. (8 punktów)**
Osoba 60-letnia zawarła **roczne** ubezpieczenie terminowe o wypłacie w wysokości 90 000 zł płatnej na koniec okresu ubezpieczenia. Ubezpieczony został zaliczony do populacji, której odpowiada $p_{60} = 0,92$. W momencie zawierania ubezpieczenia wiadomo, że ubezpieczony podda się za 10 miesięcy krótkiej operacji, którą przeżywa 80% pacjentów. Jeśli pacjent przeżyje operację, to z badań wynika, że jej wpływ na szanse jego dalszego życia jest nieistotny (tzn. po operacji ubezpieczony będzie zaliczany do tej samej populacji co przed zabiegiem). Zawarta umowa ubezpieczenia **wyłącza** świadczenie z tytułu śmierci jeśli ubezpieczony umrze w trakcie tej operacji.

Wyznacz jednorazową składkę netto dla tego ubezpieczenia przy założeniu hipotez HJP, HU oraz wiedząc, że $v = 0,95$. Ponadto zakładamy, że 1 miesiąc to $\frac{1}{12}$ roku.

Wskazówka: Rozważ następujace przedziały, w których mogła nastąpić wypłata świadczenia: „przed operacją" i „po operacji, którą pacjent przeżył".

Zadanie **3. (8 punktów)**

Dziekan podejrzewa, że jedną z przyczyn niepowodzeń w studiowaniu jest spędzanie przez studentów zbyt dużej ilości czasu na surfowaniu w Internecie. W celu oszacowania przeciętnego czasu poświęcanego przez studentów na tą aktywność, wylosowano grupę pięciu studentów i zarejestrowano następujące czasy spędzone na buszowaniu w sieci: 10, 7, 5, 4, 3.
Wyznacz przedział ufności, na poziomie ufności $\alpha = 0,95$, dla średniego czasu spędzanego przez studentów na surfowaniu w Internecie.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Sprawdzić, czy odwzorowanie dane wzorem

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_* = \sum_{n=1}^{2017} |x_n| + \sup_{n>2017} |x_n|, \quad x \in \ell_\infty,$$

jest normą na ℓ_∞. Obliczyć wartość tego odwzorowania na ciągu $(\frac{1}{2^n})_{n=1}^{\infty}$.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Obliczyć całkę

$$\int_\gamma \frac{e^z(z-4)}{z(z+i)^2}\,\mathrm{d}\,z,$$

po dodatnio zorientowanym okręgu $\gamma = \{z : |z+2i| = \frac{3}{2}\}$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 13.09.2017
Nauczycielska

Zadanie **1. (8 punktów)**

Mamy dane dwa kwadraty: Jeden ma wierzchołki kolejno: $ABCD$, a drugi $DEFG$, przy czym E leży na boku CD a punkty A, D, G są współliniowe. Punkty G, F leżą poza kwadratem $ABCD$. Oblicz pole powierzchni trójkąta BEG, jeśli wiadomo, że $DG = 6$.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Liczby Fibonacciego zdefiniowane są przez rekurencję: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ oraz $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dla $n \geq 2$. Udowodnij, że dla $n \geq 1$ zachodzi równość:

$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n-1}.$$

Zadanie **3. (8 punktów)**

Dziekan podejrzewa, że jedną z przyczyn niepowodzeń w studiowaniu jest spędzanie przez studentów zbyt dużej ilości czasu na surfowaniu w Internecie. W celu oszacowania przeciętnego czasu poświęcanego przez studentów na tą aktywność, wylosowano grupę pięciu studentów i zarejestrowano następujące czasy spędzone na buszowaniu w sieci: 10, 7, 5, 4, 3.
Wyznacz przedział ufności, na poziomie ufności $\alpha = 0,95$, dla średniego czasu spędzanego przez studentów na surfowaniu w Internecie.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Sprawdzić, czy odwzorowanie dane wzorem

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_* = \sum_{n=1}^{2017} |x_n| + \sup_{n>2017} |x_n|, \quad x \in \ell_\infty,$$

jest normą na ℓ_∞. Obliczyć wartość tego odwzorowania na ciągu $(\frac{1}{2^n})_{n=1}^{\infty}$.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Obliczyć całkę

$$\int_\gamma \frac{e^z(z-4)}{z(z+i)^2}\,\mathrm{d}\,z,$$

po dodatnio zorientowanym okręgu $\gamma = \{z : |z+2i| = \frac{3}{2}\}$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 13.09.2017
Matematyka teoretyczna

Zadanie **1. (8 punktów)**

Używając faktu, iż grupa A_5 jest grupą prostą, wyznacz wszystkie podgrupy normalne grupy S_5. Podaj uzasadnienie, że inne nie istnieją.

Zadanie **2. (8 punktów)**

W rzeczywistej przestrzeni Hilberta $L^2(0,1)$ wyznacz odległość x od podprzestrzeni liniowej rozpinanej przez 1 i x^2.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ będzie funkcją różniczkowalną taką, że $\lim_{x\to\infty} f'(x) = C$. Pokaż, że także $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = C$.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Sprawdzić, czy odwzorowanie dane wzorem

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_* = \sum_{n=1}^{2017} |x_n| + \sup_{n>2017} |x_n|, \quad x \in \ell_\infty,$$

jest normą na ℓ_∞. Obliczyć wartość tego odwzorowania na ciągu $(\frac{1}{2^n})_{n=1}^{\infty}$.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Obliczyć całkę

$$\int_\gamma \frac{e^z(z-4)}{z(z+i)^2} \,\mathrm{d}\, z,$$

po dodatnio zorientowanym okręgu $\gamma = \{z : |z + 2i| = \frac{3}{2}\}$.

EGZAMIN MAGISTERSKI, 13.09.2017
Zastosowania

Zadanie **1. (8 punktów)**
Zmienna losowa Y_n, gdzie $n = 1, 2, \ldots$, ma rozkład gamma Gamma(n, λ). Pokazać zbieżność wg rozkładu

$$\bar{Y}_n = \sqrt{n}\left(\frac{\lambda Y_n}{n} - 1\right) \to_{\mathrm{d}} \mathcal{N}(0,1).$$

Podać do czego zbiega ciąg

$$\mathbb{P}(|\bar{Y}_n| \leq 1.96), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Można wykorzystać następujące informacje:

- Dla rozkładu Gamma(a, b)

f. char.	średnia	wariancja
$(1 - \frac{it}{b})^{-a}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{a}{b^2}$

- jeśli $N \sim \mathcal{N}(0,1)$, to $\mathbb{P}(N \leq 1.96) \approx 0.975$.

Zadanie **2. (8 punktów)**
Niech $\{B_t : t \geq 0\}$ będzie ruchem Browna. Obliczyć $\mathbb{P}(B_1 > 0, B_2 > 0)$.

Zadanie **3. (8 punktów)**
Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie próbą losową z rozkładu $N(\mu, \sigma^2)$. Wyznacz Informację Fishera dla parametru μ.

Zadanie **4. (8 punktów)**

Sprawdzić, czy odwzorowanie dane wzorem

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_* = \sum_{n=1}^{2017} |x_n| + \sup_{n>2017} |x_n|, \quad x \in \ell_\infty,$$

jest normą na ℓ_∞. Obliczyć wartość tego odwzorowania na ciągu $(\frac{1}{2^n})_{n=1}^{\infty}$.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Obliczyć całkę

$$\int_\gamma \frac{e^z(z-4)}{z(z+i)^2}\,\mathrm{d}\,z,$$

po dodatnio zorientowanym okręgu $\gamma = \{z : |z+2i| = \frac{3}{2}\}$.