

EGZAMIN LICENCJACKI (zadania otwarte)
18 września 2017 r.

Zadanie 1. Niech $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = \sqrt{x} - \ln x.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(16) + f(18) \quad \text{czy} \quad 2 \cdot f(17) ?$$

Zadanie 2. Obliczyć wartość całki

$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{2-x^2}} e^{x^2+y^2} dy dx.$$

Wskazówka: Współrzędne biegunowe.

Zadanie 3. Rozwiązać równanie różniczkowe drugiego rzędu

$$x''(t) + x(t) = \cos t.$$

Zadanie 4. Dane są takie macierze kwadratowe A i B rozmiaru 3×3 o wyrazach rzeczywistych, że

- liczby 1, 2 i 3 są wartościami własnymi macierzy A ,
- liczby 4, 5 i 6 są wartościami własnymi macierzy B ,
- liczba 12 jest wartością własną macierzy AB .

Dowieść, że liczba 12 jest wartością własną macierzy BA .

Zadanie 5. Podać przykład grupy skończonej (niekoniecznie przemiennej), w której liczba elementów rzędu 3 jest równa 8.

Przypomnienie oczywistej oczywistości: Istotną częścią tego typu zadania otwartego jest zawsze udowodnienie poprawności podanego przykładu.

Zadanie 6. Dysponujemy dwoma zewnętrze nierozróżnialnymi monetami, o których wiemy, że jedna jest prawdziwa (prawdopodobieństwo wyrzucenia orła równe $1/2$), a druga fałszywa (prawdopodobieństwo wyrzucenia orła równe $1/3$).

Wykonaliśmy po 6 rzutów każdą z tych monet. Okazało się, że jedną z tych monet wyrzuciliśmy 2 orły, a drugą 3 orły. Obliczyć prawdopodobieństwo, że prawdziwa jest właśnie ta moneta, którą wyrzuciliśmy 3 orły.