

1. Podać kres górny zbioru, gdzie  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  oznacza zbiór liczb naturalnych. Określić, czy kres górny należy do zbioru (napisać **T** lub **TAK** albo **N** lub **NIE**)

a)  $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge m^2 \leq 8n^2 \right\} = \dots\dots\dots$  czy należy  $\dots\dots\dots$

b)  $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge m^2 \leq 9n^2 \right\} = \dots\dots\dots$  czy należy  $\dots\dots\dots$

c)  $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^m \leq 8^n \right\} = \dots\dots\dots$  czy należy  $\dots\dots\dots$

d)  $\sup \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^m \leq 9^n \right\} = \dots\dots\dots$  czy należy  $\dots\dots\dots$

2. Podać przedział zbieżności szeregu potęgowego. Bardzo starannie pisać nawiasy określające przynależność końców do przedziału.

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{64^n \cdot x^{3n}}{n}, \dots\dots\dots$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{64^n \cdot x^{2n}}{n}, \dots\dots\dots$

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot x^n}{n^2}, \dots\dots\dots$

d)  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot x^n, \dots\dots\dots$

3. Podać w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru  $k$ , dla których podany szereg jest zbieżny.

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^k+1}}{\sqrt[4]{n^6+n^4}}$ , .....

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^k+1}}{\sqrt[3]{n^4+n^3}}$ , .....

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[5]{n^k+1}}{\sqrt[6]{n^{10}+n^6}}$ , .....

d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{n^k+1}}{\sqrt[5]{n^8+n^5}}$ , .....

4. Podać wartość rzeczywistą parametru  $A$ , dla której podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a)  $\int_4^{\infty} \frac{A}{x} + \frac{4}{x+4} + \frac{Ax}{x^2+1} dx$ ,  $A = \dots\dots\dots$

b)  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} + \frac{A}{x+1} + \frac{x}{x^2+1} dx$ ,  $A = \dots\dots\dots$

c)  $\int_2^{\infty} \frac{1}{x} + \frac{2}{x+2} + \frac{Ax}{x^2+1} dx$ ,  $A = \dots\dots\dots$

d)  $\int_3^{\infty} \frac{A}{x} + \frac{3}{x+3} + \frac{x}{x^2+1} dx$ ,  $A = \dots\dots\dots$

5. Funkcja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  jest określona wzorem  $f(x, y) = (x + 2y)^3$ . Podać wartość odpowiedniej pochodnej cząstkowej trzeciego rzędu.

a)  $f'''_{xxx}(0, 0) = \dots\dots\dots$

b)  $f'''_{xyy}(0, 0) = \dots\dots\dots$

c)  $f'''_{xxy}(0, 0) = \dots\dots\dots$

d)  $f'''_{yyy}(0, 0) = \dots\dots\dots$

6. Dla podanej liczby zespolonej  $z$  podać taką liczbę całkowitą dodatnią  $n$  oraz liczbę rzeczywistą  $x$ , że  $z^n = x$ , a przy tym  $n$  jest możliwie najmniejsze.

a)  $z = -1 + \sqrt{3} \cdot i$ ,  $n = \dots\dots\dots$ ,  $x = \dots\dots\dots$

b)  $z = 1 + \sqrt{3} \cdot i$ ,  $n = \dots\dots\dots$ ,  $x = \dots\dots\dots$

c)  $z = 1 + i$ ,  $n = \dots\dots\dots$ ,  $x = \dots\dots\dots$

d)  $z = \sqrt{3} + i$ ,  $n = \dots\dots\dots$ ,  $x = \dots\dots\dots$

7. Dla podanej macierzy wskazać taką wartość parametru  $p$ , aby wyznacznik macierzy był równy 0.

a)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & p \end{pmatrix}$ ,  $p = \dots\dots\dots$                       b)  $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & p \end{pmatrix}$ ,  $p = \dots\dots\dots$

c)  $\begin{pmatrix} 42 & 66 \\ 49 & p \end{pmatrix}$ ,  $p = \dots\dots\dots$                       d)  $\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & p \end{pmatrix}$ ,  $p = \dots\dots\dots$

8. Dla podanej liczby  $a$  wskazać liczbę rzeczywistą  $b$  o następującej własności: Dla każdego układu równań liniowych z trzema niewiadomymi, którego rozwiązaniami są  $(1, 2, 4)$  oraz  $(1, 3, 9)$ , rozwiązaniem tego układu jest także  $(1, a, b)$ .

a)  $a = 7$ ,  $b = \dots\dots\dots$                       b)  $a = 6$ ,  $b = \dots\dots\dots$

c)  $a = 5$ ,  $b = \dots\dots\dots$                       d)  $a = 4$ ,  $b = \dots\dots\dots$

