EGZAMIN MAGISTERSKI, 09.02.2018r
Matematyka w ekonomii i ubezpieczeniach

Zadanie **1. (8 punktów)**

Dwie niezależne sumaryczne szkody S_1, S_2 mają złożone rozkłady Poissona. $S_1 \sim CPoisson(2, F)$, $S_2 \sim CPoisson(2, G)$, gdzie F jest rozkładem równomiernym na $\{0, 2, 4\}$ oraz G jest rozkładem równomiernym na $\{1, 3, 5\}$. Wtedy $S_1 + S_2$ ma rozkład złożony Poissona $CPoisson(\lambda, H)$. Wylicz jego parametry λ oraz H.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Sześćdziesięciolatek wpłaca w dniu urodzin 1000 PLN do funduszu ubezpieczeniowego. Następnej wpłaty w wysokości 2000 PLN planuje dokonać w dniu sześćdziesiątych pierwszych urodzin. Jeśli skończy sześćdziesiąt dwa lata zostanie mu wypłacona zakumulowana wartość aktuarialna opisanej powyżej renty. Znajdź tę wartość.

Do obliczeń przyjmij, że

$$p_{60} = 0.75, \quad p_{[60]+1} = 0.4, \quad i = 0.2,$$

gdzie i jest efektywną stopą procentową.

Zadanie **3. (8 punktów)**

Niech $X_1, ..., X_n$ będzie próbą losową z rozkładu wykładniczego o gęstości

$$f(x|\lambda) = \lambda \exp(-\lambda x), \qquad \lambda > 0,\ x \geq 0.$$

(i) Wyznacz estymator największej wiarogodności parametru $\theta = \frac{1}{\lambda}$.

(ii) Wyznacz metodą momentów estymator parametru θ.

(iii) Sprawdź czy otrzymane w punktach (i) i (ii) estymatory są nieobciążone

(iv) Jaki jest błąd średnio-kwadratowy tych estymatorów?

Zadanie **4. (8 punktów)**

Niech λ oznacza miarę Lebesgue'a na $\mathbb{R}$, a $\mathcal{L}$ – σ-ciało zbiorów mierzalnych względem miary Lebesgue'a. Definiujemy zbiory

$$A_n = \begin{cases} [n, n+\frac{1}{2^n}] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), & \text{gdy } n \text{ parzyste}, \\ (n, n+\frac{1}{2^n}) \cap \mathbb{Q}, & \text{gdy } n \text{ nieparzyste}. \end{cases}$$

Uzasadnić, że $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ jest $\mathcal{L}$-mierzalny i obliczyć $\lambda(A)$.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Zbadaj, które przekształcenia liniowe

$$T : \mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

są funkcjami holomorficznymi (jako przekształcenia z $\mathbb{C}$ w $\mathbb{C}$ przy $z = x+iy$).

EGZAMIN MAGISTERSKI, 09.02.2018r
Zastosowania

Zadanie **1. (8 punktów)**

Rozkład μ jest zadany przez funkcję charakterystyczną:

$$\phi(t) = \frac{1}{2}\cos(\sqrt{2}t) + \frac{1}{2}e^{-\frac{6t^2}{2}}.$$

Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie μ i $S_{49} = X_1 + \ldots + X_{49}$. Wiedząc, że $\Phi(-2) = 0.0228$, gdzie $\Phi(x)$ jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego, oszacować $\mathbb{P}(S_{49} \in (-28, 28))$.

Zadanie **2. (8 punktów)**

Niech $(B_t, \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ będzie ruchem Browna. Dla jakich parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ proces $X_t = \exp(aB_t + bt),\ t \geq 0$ jest martyngałem?

Zadanie **3. (8 punktów)**

Wyznacz sprzężoną rodzinę rozkładów *a priori* parametru p dla rodziny rozkładów dwumianowych $b(n,p)$. W oparciu o obserwację zmiennej losowej $X \sim b(n,p)$, wyznacz estymator bayesowski parametru p względem rozkładu a priori z tej rodziny przy kwadratowej funkcji straty. Ile wynosi jego ryzyko?

Zadanie **4. (8 punktów)**

Niech λ oznacza miarę Lebesgue'a na $\mathbb{R}$, a $\mathcal{L}$ – σ-ciało zbiorów mierzalnych względem miary Lebesgue'a. Definiujemy zbiory

$$A_n = \begin{cases} [n, n+\frac{1}{2^n}] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), & \text{gdy } n \text{ parzyste}, \\ (n, n+\frac{1}{2^n}) \cap \mathbb{Q}, & \text{gdy } n \text{ nieparzyste}. \end{cases}$$

Uzasadnić, że $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ jest $\mathcal{L}$-mierzalny i obliczyć $\lambda(A)$.

Zadanie **5. (8 punktów)**

Zbadaj, które przekształcenia liniowe

$$T : \mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

są funkcjami holomorficznymi (jako przekształcenia z $\mathbb{C}$ w $\mathbb{C}$ przy $z = x+iy$).